差分戸田方程式と差分射影微分幾何
–可積分系理論と微分幾何をつなぐ–

山形大学・理学部 井ノ口順一
(INOGUCHI Jun-ichi)

DISDDG2010

目的

- 可積分系の解ける仕組み・構造・からくり
- 対称性をもつ微分方程式
- 対称性を明らかにするものが幾何学

この講義の目標

- 2 次元戸田格子 (2DTL) の幾何学
- 2DTL の幾何学的差分化

1　ラプラスの方法

2 変数函数 $Z = Z(x, y)$ に対する偏微分方程式

$$Z_{xy} + a(x, y)Z_x + b(x, y)Z_y + c(x, y)Z = 0 \tag{1}$$

を求積法で解くことを考える. (1) を

$$\frac{\partial}{\partial x}(Z_y + aZ) + b(Z_y + aZ) - (a_x + ab - c)Z = 0.$$

と書き換え

$$h := a_x + ab - c \tag{2}$$

とおく.

さらに $h \equiv 0$ と仮定する．このとき (1) は次の形になり

$$\frac{\partial}{\partial x}(Z_y + aZ) + b(Z_y + aZ) = 0$$

求積法で解ける．実際：

$$s := \int b(x, y)\,\mathrm{d}x, \quad S := e^s(Z_y + aZ)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial x} &= (e^s)_x(Z_y + aZ) + e^s(Z_y + aZ)_x \\
&= e^s b(Z_y + aZ) + e^s(Z_{xy} + a_x Z + aZ_x) \\
&= e^s b(Z_y + aZ) + e^s(-aZ_x - bZ_y - cZ + a_x Z + aZ_x) \\
&= e^s b(Z_y + aZ) + e^s\{-bZ_y + (a_x - c)Z\} \\
&= e^s b(Z_y + aZ) + e^s\{-bZ_y + (-ab)Z\} \\
&= e^s b(Z_y + aZ) - e^s b(Z_y + aZ) = 0
\end{aligned}$$

より

$$S(x, y) = F(y)$$

の形であることがわかる．従って

$$Z_y + aZ = e^s F(y) \tag{3}$$

を得た．

同様に

$$t := \int a(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad T := e^t Z$$

とおくと

$$\frac{\partial T}{\partial y} = ae^t Z + e^t Z_y = e^{t-s} F(y)$$

より

$$T(x,y) = \int e^{t-s} F(y)\,\mathrm{d}y + G(x)$$

を得る．従って

$$Z(x,y) = e^{-t}\left[\int e^{t-s} F(y)\,\mathrm{d}y + G(x)\right] \tag{4}$$

という形であることがわかる．

函数 $F(y), G(x)$ は初期条件 $Z(x_0, y),\ Z(x, y_0)$ を指定することで決まる.

$$F(y) = S(x,y) = e^s(Z_y + aZ) = \left[e^s(Z_y + \frac{\partial t}{\partial y}Z)\right](x,y).$$

$F(y)$ は x に依存しないのだから右辺の $x = x_0$ での値で決まってしまう。

また

$$G(x) = T(x,y) - \int e^{t-s}F(y)\,\mathrm{d}y$$

より $G(x)$ は右辺の $y = y_0$ での値で決まる.

ここまでの議論は $k := b_y + ab - c \equiv 0$ の場合にも並行して行える.

定理 1.1 偏微分方程式：

$$Z_{xy} + a(x,y)Z_x + b(x,y)Z_y + c(x,y)Z + l(x,y) = 0$$

において $h = a_x + ab - c \equiv 0$ あるいは $k = b_y + ab - c \equiv 0$ であればこの偏微分方程式は求積法で解ける.

h,k を (1) の**ラプラス不変量** (Laplace invariants) とよぶ.

2　ラプラス変換

発想を逆転させて "消えないとはどういうことか" に関心を向ける.

$$Z_1 := Z_y + aZ \tag{5}$$

と定義する. (1) より

$$(Z_1)x + bZ_1 - hZ = 0,$$

$$(Z_1)xy + b(Z_1)y + b_y Z_1 - (hZ)_y = 0$$

を得る. ここで

$$a_1 := a - \frac{h_y}{h},\ b_1 := b,\ c_1 := ab + h\left(\frac{b}{h}\right)_y - h$$

と定義すると Z_1 についての次の方程式が得られる.

$$(Z_1)_{xy} + a_1(Z_1)_x + b_1(Z_1)_y + c_1(Z_1) = 0 \tag{6}$$

Z_1 は (1) の解ではないが同じ形の別の偏微分方程式 (6) の解を与えている. 同様に $Z \mapsto Z_{-1} = Z_x + bZ$ も考えられる.

定義　Z_1 を Z の 1 次ラプラス変換, Z_{-1} を -1 次ラプラス変換と呼ぶ.

命題 2.1 $Z_1 = \mathcal{L}_+(Z),\ Z_{-1} = \mathcal{L}_-(Z)$ と書くことにすると

$$(\mathcal{L}_- \circ \mathcal{L}_+)(Z) = hZ, \quad (\mathcal{L}_+ \circ \mathcal{L}_-)(Z) = kZ$$

が成立する.

これはラプラス変換が**射影幾何学的**であることを示唆している.

3　曲面に対するラプラス変換

ダルブー (Darboux) は前節で与えたラプラス変換を微分幾何学に応用した.

幾何学のどういう場面にこの形の偏微分方程式が現れるか？

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面の場合：

(u_1, u_2) を径数とする曲面の位置ベクトル場を $\boldsymbol{Z}(u_1, u_2)$ と表す. 単位法ベクトル場を $\boldsymbol{n}$ とする. **ガウスの公式**= $\boldsymbol{Z}$ の 2 階微分 $\boldsymbol{Z}_{u^i u^j}$ を曲面の接方向と法方向に分解した式:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{Z}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial u_k} + h_{ij} \boldsymbol{n} \tag{7}$$

接方向の係数 Γ_{ij}^k を**接続係数**, 法方向の係数 h_{ij}(で決まる対称微分形式 $\mathrm{II} = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\, \mathrm{d}u_i \mathrm{d}u_j$ を**第 2 基本形式**とよぶ. 接続係数は $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ をみたす.

ラプラス変換が適用可能な曲面については計量がなくてもよい。実際 (7) のような分解さえあればよい.

曲面 $\boldsymbol{Z}$ に対し接続 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ と横断的ベクトル場 ξ が存在し次の分解が成立する:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{Z}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial u_k} + h_{ij}\xi, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{8}$$

この状況にあう設定には $\mathbb{R}^3$ 内の曲面の他にも次の例がある.

1. $(2+1)$ 次元ミンコフスキー時空 $\mathbb{R}_1^3$ における空間的曲面・時間的曲面（相対論等に応用される）;
2. 等積アフィン空間 $\mathbb{A}^3$ におけるアフィン曲面（情報幾何学に応用される, Tzitzeica 方程式）.

定義　$\mathbb{R}^3$ の曲面，$\mathbb{R}^3_1$ 内の空間的曲面・時間的曲面，または $\mathbb{A}^3$ 内のアフィン曲面において $h_{12}=0$ となる局所座標系 (u_1,u_2) が採れるとき (u_1,u_2) を共軛網 (conjugate nets) と呼ぶ.

共軛網で径数づけられた曲面の場合, ガウスの公式は

$$\boldsymbol{Z}_{u^1u^2}-\Gamma^1_{12}\boldsymbol{Z}_{u^1}-\Gamma^2_{12}\boldsymbol{Z}_{u^2}=\boldsymbol{0}$$

となりこれは (1) の形である。さらにラプラス変換は次で与えられる:

$$\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}_{u^2}/\Gamma^1_{12},\quad \boldsymbol{Z}_{-1}=\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}_{u^1}/\Gamma^2_{12}.$$

例 3.1 (回転面) $\mathbb{R}^3$ 内の回転面

$$\boldsymbol{Z}(x,y) = (f(x)\cos y,\ f(x)\sin y,\ g(x)),\ f>0,\ f'(x)^2+g'(x)^2=1$$

を考える (プライムは x に関する微分をあらわす). こんな感じ

回転面の計量 I, 第 2 基本形式 II は次で与えられる:

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}x^2 + f(x)^2 \mathrm{d}y^2, \quad \mathrm{II} = (f'g'' - f''g')\mathrm{d}x^2 + fg'\mathrm{d}y^2.$$

特に (x, y) は共軛網である. $(u^1, u^2) = (x, y)$ と選べば

$$\Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = (\log f)'.$$

であるから回転面 $\boldsymbol{Z}$ は次をみたす.

$$\boldsymbol{Z}_{xy} - (\log f)' \boldsymbol{Z}_y = \boldsymbol{0}.$$

課題 3.2 ラプラス不変量を計算せよ.

答え：

$$h=-\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}\equiv 0,$$

$$k=-\frac{\partial}{\partial y}\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\log f(x))\equiv 0$$

であるからラプラス変換を考えることはできない．ただし形式的には $\boldsymbol{Z}_{-1}$ を計算することはできる．

$$\boldsymbol{Z}_{-1}=\boldsymbol{Z}_x-\frac{f'}{f}\boldsymbol{Z}=(0,0,g'-fg')$$

この場合 $\boldsymbol{Z}_{-1}$ は回転軸の一部である．

例 3.3 共軛網 (x,y) で径数づけられた曲面:

$$\boldsymbol{Z}(x,y) = \left(\frac{e^{xy}(xy-1)}{y^2}, \frac{e^{xy}(x^2-2xy+2)}{y^3}, \cos y\right)$$

を考える.

課題 3.4 ラプラス不変量を計算せよ.

答え：

この例では $h = 1$ である．$\boldsymbol{Z}$ のラプラス変換 $\boldsymbol{Z}_1$ は

$$\boldsymbol{Z}_1 = \left(\frac{e^{xy}(xy-2)}{xy^3}, \frac{e^{xy}(x^2y^2-4xy+6)}{xy^4}, \frac{x\cos y + \sin y}{x} \right)$$

で与えられる．

課題 3.5 これらの曲面の図を描け．

4　射影空間

ラプラス変換は射影幾何学的である.

$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を通る直線全体を P^n で表し n 次元**射影空間** (real projective n-space) とよぶ.

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+1}\text{が同一の直線 } x \in P^n\text{を定める} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}^{\times}$$

より P^n は商空間 $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{R}^{\times}$ と表示される。射影 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to P^n$ は点 $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}$ を通る直線 $x = \pi(\boldsymbol{x})$ を対応させるものとして定まる. $x \in P^n$ に対し $x = \pi(\boldsymbol{x})$ となる $\boldsymbol{x}$ をひとつとり, その成分の連比 $x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}$ を x の**斉次座標** (または同次座標 homogeneous coordinates) とよび $[\boldsymbol{x}] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$ と表す ($\boldsymbol{x}$ そのものを斉次座標と呼んでしまうこともある).

非斉次座標とアフィン・チャート $n=1$ として説明する.

$$\hat{U}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mid x_1 \neq 0\ \},$$
$$\hat{U}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mid x_2 \neq 0\ \}$$

とおく.

$$P^1 = U_1 \cup U_2, \quad U_i = \pi(\hat{U}_i)$$

である. $U_1 \ni x = [x_1, x_2]$, $x_1 \neq 0$ に対し $[x_1, x_2] = [1 : x_2/x_1]$ であるから U_1 内の "点"x の座標として x_2/x_1 を採用できる.

これを x の (U_1 における) **非斉次座標** (inhomogeneous coordinate) とよぶ. 対応:

$$\mathbb{R}^1 \ni z \mapsto [1 : z] \in U_1,$$

$$U_1 \ni [p : q] \mapsto q/p \in \mathbb{R}^1$$

により $\mathbb{R}^1 \subset P^1$ とみることができる (U_2 についても同様). $\mathbb{R}^1 \subset P^1$ を P^1 のアフィン・チャート (affine chart) とよぶ.

5　ロジスティック方程式の幾何学的差分化

筧さんの講義でロジスティック方程式

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \alpha N(1-\lambda N)$$

の差分化が与えられていた（記号は変えています）.

$$\frac{N(t+\delta)-N(t)}{\delta} = \alpha N(t)(1-\lambda N(t+h)).$$

ここで, ロジスティック方程式のもつ対称性（射影幾何学的性質）に着目した差分化を説明する（広田・木村）.

まず**有理形変換** $N = g/f$ を行う．このときロジスティック方程式は

$$\dot{g}f - g\dot{f} = \alpha g(f - \lambda g)$$

の形になる．この方程式は**ゲージ変換**

$$f(t) \mapsto f(t)h(t), \quad g(t) \mapsto g(t)h(t)$$

で不変.

課題 5.1 ゲージ不変性を確かめよ.

ゲージ不変性と有理形変換は射影的解釈ができる．未知函数 N を

$$N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1 \subset P^1$$

と思い直す．つまり $N(t) = [1 : N(t)]$ と理解する．

すると

$$[1 : N(t)] = [1 : g(t)/f(t)] = [f(t) : g(t)]$$

であるから「有理形変換とは未知函数の斉次座標を一つ選ぶこと」である．

次にゲージ変換をみよう．斉次座標を

$$[f(t) : g(t)] = [\tilde{f}(t) : \tilde{g}(t)]$$

と取り替えてみると定義から

$$\tilde{f} = fh,\ \tilde{g} = gh$$

となる函数 h が存在する．つまり

$$[f(t) : g(t)] = [f(t)h(t) : g(t)h(t)]$$

これは先に挙げたゲージ変換そのものである．非斉次座標でみれば

$$\frac{g(t)h(t)}{f(t)h(t)} = \frac{g(t)}{f(t)} = N(t)$$

である．従って「ゲージ変換とは未知函数の斉次座標変換」に他ならない．

$$\dot{g}f - g\dot{f} = \alpha g(f - \lambda g)$$

は

$$(\dot{g} - \alpha g)f = g(\dot{f} - \alpha\lambda g)$$

と書き直せるから

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) - \alpha g(t) &= \beta(t)g(t) \\ \dot{f}(t) - \alpha\lambda g(t) &= \beta(t)f(t) \end{aligned}$$

をみたす函数 $\beta(t)$ が存在する．とくに f と g の取替えで $\beta(t) = 0$ を選ぶことができる．

課題 5.2 どうして？

$$\dot{g}f - g\dot{f} = \alpha g(f - \lambda g)$$

の左辺を前進差分で置き換える.

$$\frac{1}{\delta}\left\{(g(t+\delta) - g(t))f(t) - g(t)(f(t+\delta) - f(t))\right\} = \alpha g(t)(f(t) - \lambda g(t)).$$

整理して

$$g(t+\delta)f(t) - g(t)f(t+\delta) = \delta\alpha g(t)(f(t) - \lambda g(t)).$$

射影不変性 (ゲージ不変性）をチェックしよう.

射影不変になるように修正する.

$$g(t+\delta)f(t) - g(t)f(t+\delta) = \delta\alpha\{g(t)f(t+\delta) - \lambda g(t)g(t+\delta)\}.$$

ここから

$$\frac{N(t+\delta) - N(t)}{\delta} = \alpha\{N(t) - \lambda N(t)N(t+\delta)\}$$

6　射影微分幾何学

3 次元実射影空間内の曲面曲面 $z : M \to P^3$ の斉次座標ベクトル場を $\boldsymbol{z}$ で表わす.

定義　M の局所座標系 (x, y) が曲面 $z : M \to P^3$ に対する**共軛網**であるとはある斉次座標ベクトル場 $\boldsymbol{z}$ に対し

$$\boldsymbol{z}_{xy} \wedge \boldsymbol{z}_x \wedge \boldsymbol{z}_y \wedge \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

が成立することをいう (従ってどの斉次座標ベクトル場についてもこの関係をみたす).

言い換え：

$$\boldsymbol{z}_{xy} + a(x, y)\boldsymbol{z}_x + b(x, y)\boldsymbol{z}_y + c(x, y)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

となる函数 a, b, c が存在することである。

斉次座標を $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{w}$ と変えると (9) は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{w}_{xy} + (a + (\log\lambda)_y)\boldsymbol{w}_x + (b + (\log\lambda)_x)\boldsymbol{w}_y && (10)\\
&\quad + \{c + a + (\log\lambda)_x + b + (\log\lambda)_y + \lambda_{xy}/\lambda\}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} && (11)
\end{aligned}$$

と変わる．

とくに λ が (9) のスカラー解 (scalar solution)，すなわち

$$\lambda_{xy} + a(x,y)\lambda_x + b(x,y)\lambda_y + c(x,y)\lambda = 0$$

ならば

$$\boldsymbol{w}_{xy} + \tilde{a}\boldsymbol{w}_x + \tilde{b}\boldsymbol{w}_y = \boldsymbol{0}$$

の形にできる．ただし

$$\tilde{a} = a + \frac{\lambda_y}{\lambda}, \quad \tilde{b} = b + \frac{\lambda_x}{\lambda}.$$

(9), (10) はともに (1) の形である．従って $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}$ に対しラプラス変換を考えられる．

補題 6.1 $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}$ それぞれのラプラス不変量を $h,\ k,\ h',\ k'$ とすれば $h = h',\ k = k'$ である.

補題 6.2 共軛網の変換 $x = x(u),\ y = y(v)$ を行ったとき新しい共軛網に関するラプラス不変量を $\tilde{h},\ \tilde{k}$ で表わすと

$$h\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \tilde{h}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad k\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \tilde{k}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

が成立する.

曲面 M が共軛網で覆われているならば $h^{\#} = h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $k^{\#} = k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ は大域的に定義された微分式である. そこで $h^{\#}$, $k^{\#}$ を z の**ラプラス不変量**と呼ぶ (これでやっと「不変」の意味が説明できた).

以下では微分式 $h^{\#}$, $k^{\#}$, それらの係数 h, k もどちらもラプラス不変量と呼ぶことにする

命題 2.1 からラプラス変換 $\boldsymbol{z} \mapsto \boldsymbol{z}_{\pm 1}$ が射影的であることが予想された．実際次を示せる (やさしい).

命題 6.3 斉次座標ベクトル場に対するラプラス変換は射影空間内の曲面に対する変換を誘導する．すなわち

$$[\boldsymbol{z}_{\pm 1}] = [\boldsymbol{w}_{\pm 1}].$$

証明

$$\mathcal{L}_+(\boldsymbol{z}) = (\lambda \boldsymbol{w})_y + \lambda a \boldsymbol{w} = \lambda_y \boldsymbol{w} + \lambda \boldsymbol{w}_y + \lambda(\tilde{a} - \frac{\lambda_y}{\lambda})\boldsymbol{w} = \lambda(\boldsymbol{w}_y + \tilde{a}\boldsymbol{w})$$

従って $[\boldsymbol{z}_1] = [\boldsymbol{w}_1]$. ■

これら射影空間に誘導された変換もラプラス変換と呼ぶ. 命題 2.1 より P^3 内ではラプラス変換は可逆である:

$$(z_1)_{-1} = z,\ (z_{-1})_1 = z.$$

ラプラス変換を繰り返し施すことで P^3 内の曲面の列を得る.

$$\cdots \leftarrow z_{-i} \leftarrow \cdots \leftarrow z_{-2} \leftarrow z_{-1} \leftarrow z \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \cdots \rightarrow z_i \rightarrow \cdots$$

この系列 $\{z_i\}$ を**ラプラス系列** (Laplace sequence) と呼ぶ.

対応するラプラス不変量を $\{h_i\}$, $\{k_i\}$ で表わそう。ラプラス不変量の列の関係式が次で与えられる (昨日, 梶原さんが提示したダルブーの本より)：

命題 6.4

$$h_{i+1}+h_{i-1}=2h_i-\frac{\partial^2\log h_i}{\partial x\partial y},\quad k_{i+1}+k_{i-1}=2k_i-\frac{\partial^2\log h_i}{\partial x\partial y},$$

ただし $h_0=h$, $k_0=k$ と規約した．さらに $h_i=e^{r_i}$ とおけば (2) は梶原さん・筧さんの講義で解説された 2DTL(A 型の戸田場方程式)

$$\frac{\partial}{\partial x\partial y}r_i=e^{r_{i+1}}-2e^{r_i}+e^{r_{i+1}}$$

である（ここは同じ記号）．ただし r_i の個数は有限とは限っていないことに注意. A_∞ 型 2 DTL という.

7　2DTL の簡約

梶原さん・筧さんの講義にあった「簡約」を幾何学的に考える.

ある自然数 n が存在して, すべての番号 i に対し $z_{i+n} = z_i$ となるとき, ラプラス系列は**周期的**であるという.

周期的ラプラス系列に関心を向ける。ラプラス不変量から見れば周期的戸田方程式（アファイン戸田方程式）を考えることに他ならない.

例 7.1 (周期 1) 周期 $=1$ より $h_1=h,\ k_1=k$ である．特に $h=k$ であるから $(\log h)_{xy}=0$ を得るがこれは $h(x,y)=u(x)v(y)$ を意味する．そこで共軛網の変更を行い $h=k=1$ とする．変更後の共軛網も同じ記法 (x,y) で表わすと**クライン・ゴルドン方程式** (Klein-Gordon equation) $z_{xy}=z$ を得る．

例 7.2 (周期 2) $h_2 = h,\ k_2 = k$ より

$$2k - 2h = \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}, \quad 2h - 2k = \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}$$

を得る．さらに $\{\log(hk)\}_{xy} = 0$ がわかる。そこで共軛網の変更を行い $hk = 1$ とする．変更後の共軛網も同じ記法 (x, y) で表わし $h = e^{\omega}$ とおくと戸田方程式は

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = 4 \sinh \omega$$

の形になる (Sinh-Gordon equation とよばれる).

注意 7.3 この方程式はミンコフスキー時空 $\mathbb{R}^3_1$ 内の時間的平均曲率一定曲面 (相異なる 2 つの実主曲率をもつ) のガウス・コダッチ方程式を与える．この方程式の超離散化を薩摩・磯島・村田・野邊が提唱している．

例 7.4 (周期 3) 周期 3 の場合は, $(\log h)_{xy} = h - 1/h^2$ と規格化できる．この方程式は **ティツェイカ方程式** (Tzitzeica equation) とか $A_2^{(2)}$ 型戸田方程式とよばれるものである.

等積アフィン幾何における「アフィン球面」の方程式.

例 7.5 (周期 6) この場合,

$$(\log h)_{xy} = hk + \frac{1}{h}, \quad (\log k)_{xy} = hk + \frac{1}{k}$$

という方程式系を得る．これは射影微分幾何学で**デモラン方程式**（Demuolin equation）とよばれてきた．デモラン方程式は $D_3^{(2)}$ 型戸田方程式である．

注意 7.6 楕円型の戸田方程式

$$h_{i+1} + h_{i-1} = 2h_i - \frac{\partial^2 \log h_i}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad z = x + \sqrt{-1}y$$

は複素平面から複素射影空間への調和写像の方程式である．（これについては 3/9, 3/10 に東北大の「春の学校」で解説）．

8　差分化

射影空間内の「共軛網で径数付けられた曲面」$z : M \to P^3$

$$\mathbf{z}_{xy} + a\mathbf{z}_x + b\mathbf{z}_y + c\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{12}$$

の差分化を考える.「曲面の離散化」とはここでは「座標系の離散化」をさす.

方程式 (12) は $\boldsymbol{z}_{xy}$ が "$\boldsymbol{z}_x, \boldsymbol{z}_y, \boldsymbol{z}$ の定める平面に収まる" という意味だから差分化は次のように定義される.

定義 $z = z(n_1, n_2) : \mathbb{Z}^2 \to P^3$ が次の条件を満たすとき四辺形格子 (quadrilateral lattice) とよぶ.

$$T_1T_2z \in \langle z, T_1z, T_2z \rangle$$

ここで T_i は i 方向のシフト作用素:

$$T_1z(n_1, n_2) = z(n_1+1, n_2), \quad T_2z(n_1, n_2) = z(n_1, n_2+1),$$

$\langle z, T_1z, T_2z \rangle$ は $z,\ T_1z,\ T_2z$ の定める平面を表す.

非斉次座標系を用いた表示は次のようになる.

格子 $z = z(n_1, n_2) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ が discrete Laplace equation

$$\Delta_1\Delta_2 z = (T_1 A_{12})\Delta_1 z + (T_2 A_{21})\Delta_2 z$$

を満たすとき quadrilateral lattice とよぶ。ここで $\Delta_i := T_i - 1$ は i 方向の差分作用素を表す。$T_i z$ 方向の係数に $T_i A_{ij}$ という番号の付け方をするのは「離散ラプラス系列」の添え字を国場・中西・鈴木の論文と合わせるためである.

ラプラス変換の離散化は次のように定義される。

$$\mathcal{L}_+ z := z - \frac{1}{A_{21}}\Delta_1 z, \quad \mathcal{L}_- z := z - \frac{1}{A_{12}}\Delta_2 z.$$

命題 8.1 離散ラプラス変換は可逆:

$$\mathcal{L}_+ \circ \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_- \circ \mathcal{L}_+ = \text{恒等写像}.$$

離散ラプラス変換で係数 A_{ij} は次のように変わる:

$$\mathcal{L}_+ A_{12} = \frac{A_{21}}{T_2 A_{21}}(T_1 A_{12} + 1) - 1,$$

$$\mathcal{L}_+ A_{21} = T_2^{-1}\left(\frac{T_1 \mathcal{L}_+(A_{12})}{\mathcal{L}_+(A_{12})}(A_{21} + 1)\right) - 1.$$

離散ラプラス変換を繰り返して得られる系列 $\{z^l\}$

$$z^l := \mathcal{L}_+^l z,\ z^{-l} := \mathcal{L}_-^l z,\ l = 0, 1, 2, \cdots$$

を**差分ラプラス系列** (discrete Laplace sequence) とよぶ.

命題 8.2 差分ラプラス系列の係数 $\{A_{ij}^l\}$ は差分ボルテラ方程式 (discrete coupled Volterra equations) をみたす

$$\frac{\Delta_2 A_{21}^l}{A_{21}^l} = \frac{T_1 A_{12}^l - A_{12}^{l+1}}{(T_1 A_{12}^l + 1)(A_{12}^{l+1} + 1)},$$

$$\frac{\Delta_1 A_{12}^l}{A_{12}^l} = \frac{T_2 A_{12}^l - A_{21}^{l-1}}{(T_2 A_{21}^l + 1)(A_{21}^{l-1} + 1)}.$$

ここで「複比」を使う. $\mathbb{R}^3$ 内の colinear な 4 点 q_1, q_2, q_3, q_4 に対し

$$Q(q_1, q_2, q_3, q_4) := \left(\frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2}\right) : \left(\frac{q_4 - q_1}{q_4 - q_2}\right)$$

で定まる実数 $Q = Q(q_1, q_2, q_3, q_4)$ を複比 (cross ratio) とよぶ。複比は P^3 の射影変換 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ で不変な量である。Q は "形式的" に

$$Q(q_1, q_2, q_3, q_4) := \frac{q_3 - q_1}{q_3 - q_2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{q_4 - q_1}$$

と計算することができる.

離散ラプラス系列に対し次の２種の複比を考えられる。

$$K_{12} := Q(z, \mathcal{L}_+(z), T_1 z, T_2 \mathcal{L}_+(z)),$$

$$K_{21} := Q(z, \mathcal{L}_-(z), T_2 z, T_1 \mathcal{L}_-(z)).$$

ここで $K = K_{12}$ と略記する．また z_n に対する複比を $K_n = K_n(n_1, n_2)$ と書くと K_n に関する次の方程式が得られる．

$$T_2 \left(\frac{K_{l+1} + 1}{K_l + 1} \right) T_1 \left(\frac{K_{l-1} + 1}{K_l + 1} \right) = \frac{(T_1 T_2 K_l) K_l}{(T_1 K_l)(T_2 K_l)}.$$

これは筧さんの講義で「ゲージ不変形式の離散戸田場方程式」とよばれていたものである．また国場・中西・鈴木における T-system である．