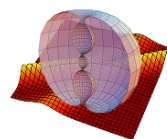




KYUSHU UNIVERSITY



DISDDG2010

可積分系の理論入門

— 2次元戸田格子を中心にして —

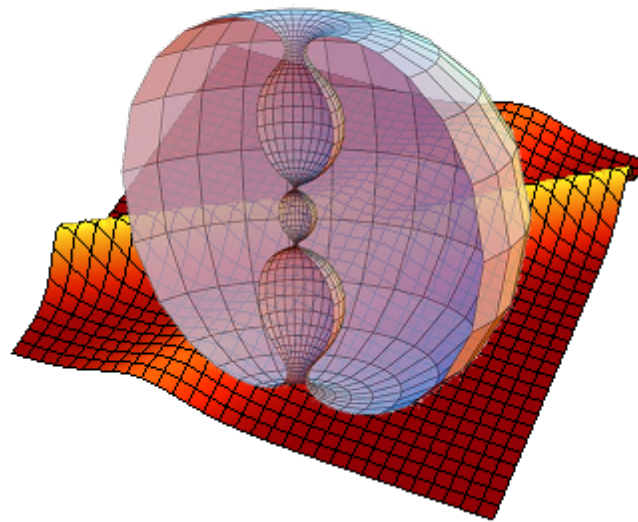
梶原 健司 (九州大学大学院数理学研究院)

九州大学産業技術数理研究センター ワークショップ
離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル

九州大学大学院数理学研究院 2010年2月22日

第1部

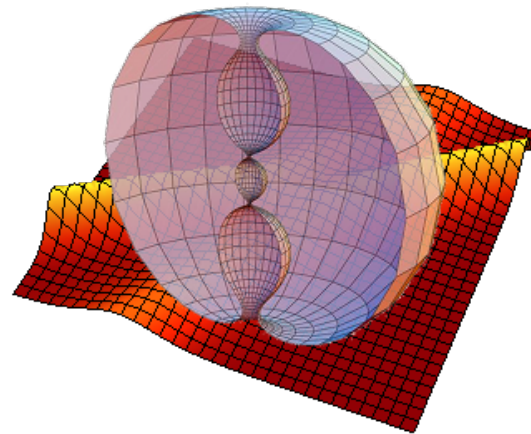
戸田格子から始まる可積分系の第1歩



主要内容とキーワード

(1次元) 戸田格子とその性質

- ☞ 完全積分可能系
- ☞ Lax 形式: 線形方程式系の両立条件
- ☞ Bäcklund 変換: 解から別の解への変換
- ☞ 広田の方法: 厳密解を具体的に作る
- ☞ ソリトン解

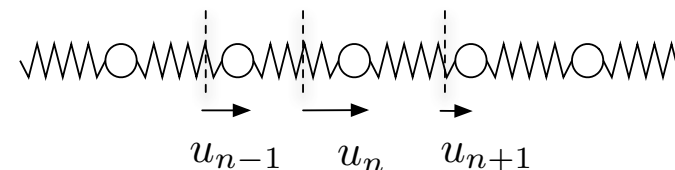


$$\text{戸田格子方程式: } \frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}}$$

相対変位 (バネの伸び): $r_n = q_n - q_{n-1}$

バネのポテンシャルエネルギー: $\phi(r) \Rightarrow$ 力: $-\phi'(r)$

$$\text{運動方程式: } m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\phi'(r_n) + \phi'(r_{n+1})$$



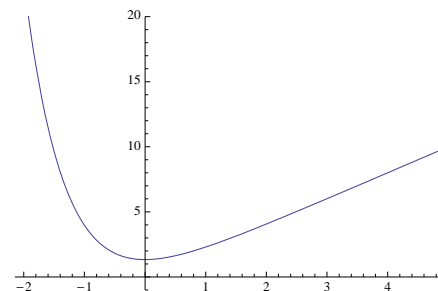
✓ **Hooke の法則に従うバネ:** $\phi(r) = \frac{1}{2}\kappa r^2$ 力: $-\phi'(r) = -\kappa r$

$$\text{運動方程式: } \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\kappa(q_n - q_{n-1}) + \kappa(q_{n+1} - q_n) = \kappa(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n)$$

✓ **戸田ポテンシャル:** $\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar$ $a, b > 0$ 力: $-\phi'(r) = a(e^{-br} - 1)$

注意: $r \sim 0$: $\phi(r) \sim \frac{a}{b} + \frac{ab}{2}r^2$ (\sim Hooke の法則)

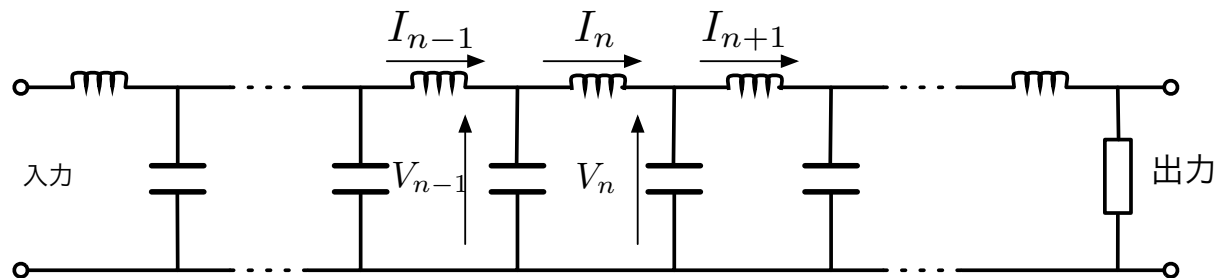
$$\text{運動方程式: } m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = a \left[e^{-b(q_n - q_{n-1})} - e^{-b(q_{n+1} - q_n)} \right]$$



戸田格子方程式：
$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}}$$

✓
$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = e^{r_{n+1}} + e^{r_{n-1}} - 2e^{r_n} \quad r_n := q_n - q_{n+1}$$

✓
$$\frac{d^2}{dt^2} \log(1 + V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \log(1 + V_n) = I_n - I_{n+1}, \\ \frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + V_n = e^{r_n}, \\ I_n = \frac{dq_n}{dt} \end{cases}$$



✓
$$\begin{cases} \frac{da_n}{dt} = a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \frac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \end{cases} \quad a_n = \frac{1}{2} e^{\frac{q_n - q_{n+1}}{2}}, \quad b_n = \frac{1}{2} \frac{dq_n}{dt}$$

1. 通常の古典力学で取り扱える力学系, 特に Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m} \sum_n p_n^2 + \frac{a}{b} \sum_n e^{-b(q_n - q_{n-1})}, \quad q_n = q_n, \quad p_n = m \frac{dq_n}{dt},$$

をもつ Hamilton 力学系,

2. N 個の質点からなる有限系(周期系など)の場合, ポアソン括弧に関して可換な(=独立な)保存量が N 個ある. すなわち, **完全積分可能系**であって, 求積法で初期値問題が解ける.

※ Liouville-Arnoldの定理

自由度 N の Hamilton 系がポアソン括弧に関して可換な保存量を N 個持つならば, その力学系の初期値問題は有限回の求積操作, すなわち,

- 四則演算
- 微分積分
- 逆函数を取る操作
- 微分積分を含まない方程式を解く操作

の有限回の繰り返しで解ける. cf. 大貫・吉田「力学」(岩波書店)

※ 完全積分可能系の例

- 万有引力に従って運動する2体問題(Kepler問題)
- Lagrangeのコマ, Eulerのコマ, Kowalevskayaのコマ
- 戸田格子

3. 線形作用素の固有値問題の固有値保存変形として定式化できる (**Lax 形式**).

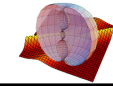
$$\frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n, \quad \frac{d}{dt} \log(1+V_n) = I_n - I_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad I_{N+1} = I_1, \quad V_{N+1} = V_1 \quad \text{戸田格子 (周期系)}$$

$$L\Psi = \lambda\Psi, \quad L = \begin{pmatrix} I_1 & 1 & & & & & 1 + V_N \\ 1 + V_1 & I_2 & 1 & & & & \\ & 1 + V_2 & I_3 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 + V_{N-2} & I_{N-1} & 1 & \\ 1 & & & & 1 + V_{N-1} & I_N & \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = B\Psi, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & 1 + V_N \\ 1 + V_1 & 0 & & & & & \\ & 1 + V_2 & 0 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 + V_{N-2} & 0 & & \\ & & & & 1 + V_{N-1} & 0 & \end{pmatrix}$$

固有値 λ が t に依らないという条件の下で, 両立条件を考えると

$$\frac{dL}{dt}\Psi + L\frac{d\Psi}{dt} = \lambda\frac{d\Psi}{dt} \rightarrow \frac{dL}{dt}\Psi + LB\Psi = BL\Psi \rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = BL - LB} \Rightarrow \text{戸田格子}$$



Lax 形式のご利益の一つ： 保存量があらわに計算できる

命題： $\text{Tr } L^k$ ($k = 1, \dots, N$) は保存量である。すなわち、

$$\frac{d}{dt} \text{Tr } L^k = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

証明： $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対して $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^N a_{ii}$, $\text{Tr } AB = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N b_{ki} a_{ik} = \text{Tr } BA$

また A, B の要素が t の関数であるとき

$$\frac{d}{dt} \text{Tr } AB = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{ki} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (a'_{ik} b_{ki} + a_{ik} b'_{ki}) = \text{Tr} \left(\frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt} \right).$$

$L' = BL - LB$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Tr } L^k &= \text{Tr} (L' L^{k-1} + L L' L^{k-2} + \dots + L^{k-1} L') = \text{Tr} [(BL - LB) L^{k-1} + L(BL - LB) L^{k-2} + \dots + L^{k-1} (BL - LB)] \\ &= \text{Tr} [(BL^k - LBL^{k-1}) + (LBL^{k-1} - LBL^{k-2}) + \dots + (L^{k-1} BL - L^k B)] = \text{Tr} (BL^k - L^k B) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

※ バネ・質点系の変数 q_n で書き直すと、 $\text{Tr } L \propto$ 運動量, $\text{Tr } L^2 \propto$ 全エネルギー

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_n}{dt} = \lambda e^{q_n - \bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda} e^{\bar{q}_{n-1} - q_n} + \alpha \\ \frac{d\bar{q}_n}{dt} = \lambda e^{q_n - \bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda} e^{\bar{q}_n - q_{n+1}} + \alpha \end{array} \right. \longrightarrow \bar{q}_n (q_n) \text{ を消去 } \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \\ \frac{d^2 \bar{q}_n}{dt^2} = e^{\bar{q}_{n-1} - \bar{q}_n} - e^{\bar{q}_n - \bar{q}_{n+1}} \end{array} \right.$$

戸田格子方程式の解 q_n が与えられれば, (*) を解けば別の解 \bar{q}_n が得られる: **Bäcklund 変換**

例: $q_n = 0, \lambda = e^{-\kappa}, \alpha = -(e^\kappa + e^{-\kappa})$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \lambda e^{-\bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda} e^{\bar{q}_{n-1}} + \alpha \\ \frac{d\bar{q}_n}{dt} = \lambda e^{-\bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda} e^{\bar{q}_n} + \alpha \end{array} \right. \longrightarrow e^{\bar{q}_n} = X_n \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_n = -\frac{e^{-\kappa}}{e^\kappa X_{n-1} - (e^\kappa + e^{-\kappa})} \quad \text{離散 Riccati 方程式} \\ X'_n = e^\kappa X_n^2 - (e^\kappa + e^{-\kappa}) X_n + e^{-\kappa} \quad \text{Riccati 方程式} \end{array} \right.$$

\Rightarrow 少し頑張ると解ける $X_n = \frac{1 + e^{2\kappa(n-1)+2\beta t}}{1 + e^{2\kappa n+2\beta t}}, \quad \beta = \sinh \kappa = \frac{e^\kappa - e^{-\kappa}}{2}$

- ✓ 一般にはこの方法で解を具体的に作ることは簡単ではないが, 背後の豊富な数理構造を強く示唆.
- ✓ 解析力学の「正準変換」として定式化可能.

前のページの例の解の具体的な形を見て

$$e^{q_n} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad \text{または} \quad q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n},$$

とにおいて, τ_n で方程式を書き直してみよう.

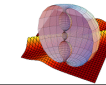
$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_n}{dt^2} &= e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_{n-1} - \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_n = \frac{\tau_{n-2}\tau_n}{\tau_{n-1}^2} - \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2} \\ \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_{n-1} - \frac{\tau_{n-2}\tau_n}{\tau_{n-1}^2} &= \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_n - \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2} = f(t) \\ \rightarrow \boxed{\tau_n'' \tau_n - \tau_n^2} &= \tau_{n-1}\tau_{n+1} - f(t) \tau_n^2 \quad (**) \end{aligned}$$

広田微分 (D-operator)

$$D_x^m D_t^n f \cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{x=x', t=t'}$$

$$D_x f \cdot g = f_x g - f g_x, \quad D_x^2 f \cdot g = f_{xx} g - 2f_x g_x + f g_{xx}, \quad D_x D_t f \cdot g = f_{xt} g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt}, \quad \text{etc.}$$

$$(**) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - f(t) \tau_n^2} \quad \text{戸田格子方程式の双線形形式 (方程式)}$$



$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \longrightarrow q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \longrightarrow \frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - f(t) \tau_n^2$$

$$D_x^m D_t^n f \cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{x=x', t=t'}$$

広田微分の性質

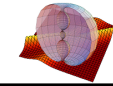
- ✓ 双線形性: $D_x^m D_t^n (af + bg) \cdot h = a D_x^m D_t^n f \cdot h + b D_x^m D_t^n g \cdot h$ (a, b : 定数, 第2の引数についても同様)
- ✓ 交換則: $D_x^m D_t^n f \cdot g = (-1)^{m+n} D_x^m D_t^n g \cdot f$
- ✓ 片方が1ならただの微分: $D_x^m D_t^n f \cdot 1 = \partial_x^m \partial_t^n f$
- ✓ 指数関数の計算則: $D_x^m D_t^n e^{p_1 x + q_1 t} \cdot e^{p_2 x + q_2 t} = (p_1 - p_2)^m (q_1 - q_2)^n e^{(p_1 + p_2)x + (q_1 + q_2)t}$

ソリトン解の計算

- ✓ $q_n = 0$ は解. 対応して, $\tau_n = 1$ は解 ($f(t) = 1$).
- ✓ $\tau_n = 1$ からの摂動法で解を作っていく. すなわち, ϵ を (形式的) 微小パラメータとして展開

$$\tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \dots$$

を仮定し, 方程式に代入して ϵ のべきで整理する. 各係数から得られる方程式を下の方から順番に解き, 適当なところで無理矢理打ち切って近似解とする.



$$\frac{1}{2}D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2, \quad \tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}D_t^2 \left(1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)}\right) \cdot \left(1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)}\right) \\ &= \left(1 + \epsilon f_{n+1}^{(1)} + \epsilon^2 f_{n+1}^{(2)} + \epsilon^3 f_{n+2}^{(3)}\right) \left(1 + \epsilon f_{n-1}^{(1)} + \epsilon^2 f_{n-1}^{(2)} + \epsilon^3 f_{n-2}^{(3)}\right) - \left(1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)}\right)^2 \end{aligned}$$

$$O(\epsilon): \quad f_n^{(1)''} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}$$

$$O(\epsilon^2): \quad f_n^{(2)''} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2}$$

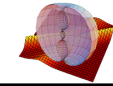
$$O(\epsilon^3): \quad f_n^{(3)''} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)}f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}f_n^{(2)}$$

1-ソリトン解: $f_n^{(1)} = e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = p_1 n + q_1 t (+\eta_{10})$

$$O(\epsilon): \quad q_1^2 = e^{p_1} + e^{-p_1} - 2 = \left(e^{\frac{p_1}{2}} - e^{-\frac{p_1}{2}}\right)^2 \rightarrow q_1 = \pm 2 \sinh \frac{p_1}{2}$$

$$O(\epsilon^2): \quad f_n^{(2)''} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)}f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2} = 0$$

→ $f_n^{(2)} = 0$ と取ってもよい! 同様に $f_n^{(k)} = 0, k = 3, 4, \dots$ と取ってもよい.



1-ソリトン解: $\tau_n = 1 + e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = p_1 n \pm 2 \sinh \frac{p_1}{2} t.$

2-ソリトン解: $f_n^{(1)} = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \quad \eta_i = p_i n + q_i t (+\eta_{i0})$

$$O(\epsilon): \quad q_i = \pm 2 \sinh \frac{p_i}{2}$$

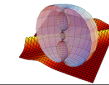
$$\begin{aligned} O(\epsilon^2): \quad & f_n^{(2)''} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2} D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2} \\ & = -\frac{1}{2} D_t^2 (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + (e^{\eta_1+p_1} + e^{\eta_2+p_2})(e^{\eta_1-p_1} + e^{\eta_2-p_2}) - (e^{\eta_1} + e^{\eta_2})^2 \\ & = -D_t^2 e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2+p_1-p_2} + e^{\eta_1+\eta_2-p_1+p_2} - 2e^{\eta_1+\eta_2} \\ & = -(q_1 - q_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} + \left(e^{\frac{p_1-p_2}{2}} - e^{-\frac{p_1-p_2}{2}} \right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} = -\left(e^{\frac{p_1}{2}} - e^{-\frac{p_1}{2}} \right) \left(e^{\frac{p_2}{2}} - e^{-\frac{p_2}{2}} \right) \left(e^{\frac{p_1-p_2}{4}} - e^{-\frac{p_1-p_2}{4}} \right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} \end{aligned}$$

そこで $f_n^{(2)} = A_{12} e^{\eta_1+\eta_2}$ とおくと,

$$\text{左辺} = A_{12}(q_1 + q_2)^2 e^{\eta_1+\eta_2} - A_{12} \left(e^{\frac{p_1+p_2}{2}} - e^{-\frac{p_1+p_2}{2}} \right)^2 e^{\eta_1+\eta_2} = -A_{12} \left(e^{\frac{p_1}{2}} - e^{-\frac{p_1}{2}} \right) \left(e^{\frac{p_2}{2}} - e^{-\frac{p_2}{2}} \right) \left(e^{\frac{p_1+p_2}{4}} - e^{-\frac{p_1+p_2}{4}} \right)^2 e^{\eta_1+\eta_2}$$

これより

$$A_{12} = \left(\frac{e^{\frac{p_1-p_2}{4}} - e^{-\frac{p_1-p_2}{4}}}{e^{\frac{p_1+p_2}{4}} - e^{-\frac{p_1+p_2}{4}}} \right)^2 = \left(\frac{\sinh \frac{p_1-p_2}{4}}{\sinh \frac{p_1+p_2}{4}} \right)^2$$



$$f_n^{(1)} = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \quad f_n^{(2)} = A_{12}e^{\eta_1+\eta_2}, \quad q_i = \pm 2 \sinh \frac{p_i}{2}$$

$$\begin{aligned} O(\epsilon^3): \quad & f_n^{(3)''} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_t^2 f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} f_n^{(2)} \\ & = -D_t^2 (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} + (e^{\eta_1+p_1} + e^{\eta_2+p_2}) A_{12}e^{\eta_1+\eta_2-p_1-p_2} + (e^{\eta_1-p_1} + e^{\eta_2-p_2}) A_{12}e^{\eta_1+\eta_2+p_1+p_2} \\ & \quad - 2(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} \end{aligned}$$

第1項:

$$\begin{aligned} D_t^2 (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot e^{\eta_1+\eta_2} &= D_t^2 e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_1+\eta_2} + D_t^2 e^{\eta_2} \cdot e^{\eta_1+\eta_2} = [q_1 - (q_1 + q_2)]^2 e^{2\eta_1+\eta_2} + [q_2 - (q_1 + q_2)]^2 e^{\eta_1+2\eta_2} \\ &= q_2^2 e^{2\eta_1+\eta_2} + q_1^2 e^{\eta_1+2\eta_2} \end{aligned}$$

これより $O(\epsilon^3)$ の右辺は

$$A_{12} \left[-q_2^2 e^{2\eta_1+\eta_2} - q_1^2 e^{\eta_1+2\eta_2} + \left(e^{\frac{p_2}{2}} - e^{-\frac{p_2}{2}} \right)^2 e^{2\eta_1+\eta_2} + \left(e^{\frac{p_1}{2}} - e^{-\frac{p_1}{2}} \right)^2 e^{\eta_1+2\eta_2} \right] = 0$$

となって, やはり $f_n^{(3)} = 0$ と取ることができる. 同様にして $f_n^{(k)} = 0$ ($k = 3, 4, \dots$) と取れる. 以上より

2-ソリトン解: $\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2}, \quad A_{12} = \left(\frac{\sinh \frac{p_1-p_2}{4}}{\sinh \frac{p_1+p_2}{4}} \right)^2$

なぜ2-ソリトン解は「2-ソリトン」か？ (1)



$$\text{2-ソリトン解: } \tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2}, \quad \eta_i = p_i n + q_i t, \quad q_i = -2 \sinh \frac{p_i}{2}$$

一般性を失わずに $p_1 > p_2 > 0$ とする. すると, $\eta_i = p_i(n - v_i t)$, $v_i = \frac{2}{p_i} \sinh \frac{p_i}{2}$ とするとき, v_i が p_i の単調増加関数だということに注意すると, $v_1 > v_2 > 0$.

✓ **速度 v_1 の波に乗って眺める:** $\eta_1 = p_1(n - v_1 t) = p_1 \xi_1$, $\xi_1 = \text{一定}$.

$\eta_2 = p_2(n - v_2 t) = p_2(n - v_1 t) + p_2(v_1 - v_2)t = p_2 \xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t$ ($v_1 - v_2 > 0$) に注意.

$$\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} = 1 + e^{p_1 \xi_1} + e^{p_2 \xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t} + A_{12}e^{(p_1 + p_2)\xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t}$$

$$t \rightarrow \infty : \tau_2 \sim 1 + e^{p_1 \xi_1} = \boxed{1 + e^{\eta_1}}$$

$$t \rightarrow +\infty : \tau_2 \sim e^{p_2 \xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t} + A_{12}e^{(p_1 + p_2)\xi_1 + p_2(v_1 - v_2)t} = e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} = e^{\eta_2} (1 + A_{12}e^{\eta_1}) \approx \boxed{1 + A_{12}e^{\eta_1}}$$

$t \sim \pm\infty$ で速度 v_1 で走る波が見えており, 振幅, 速度は変わらない. ただし, **位相が $\log A_{12}$ ずれた.**

なぜ2-ソリトン解は「2-ソリトン」か？ (2)



✓ 速度 v_2 の波に乗って眺める: $\eta_2 = p_2(n - v_2 t) = p_2 \xi_2$, $\xi_2 = \text{一定}$.

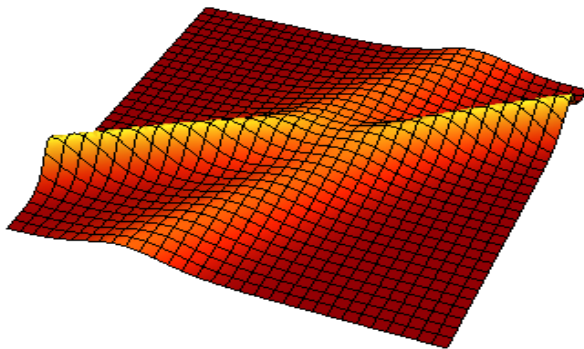
$\eta_1 = p_1(n - v_1 t) = p_1(n - v_2 t) + p_1(v_2 - v_1)t = p_1 \xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t$ ($v_1 - v_2 < 0$) に注意.

$$\tau_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} = 1 + e^{p_1 \xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t} + e^{p_2 \xi_2} + A_{12}e^{(p_1 + p_2)\xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t}$$

$$t \rightarrow -\infty : \tau_2 \sim e^{p_1 \xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t} + A_{12}e^{(p_1 + p_2)\xi_2 + p_1(v_2 - v_1)t} = e^{\eta_1} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} = e^{\eta_1} (1 + A_{12}e^{\eta_2}) \approx \boxed{1 + A_{12}e^{\eta_2}}$$

$$t \rightarrow +\infty : \tau_2 \sim 1 + e^{p_2 \xi_2} = \boxed{1 + e^{\eta_2}}$$

$t \sim \pm\infty$ で速度 v_2 で走る波が見えており, 振幅, 速度は変わらない. ただし, 位相が $-\log A_{12}$ ずれた.



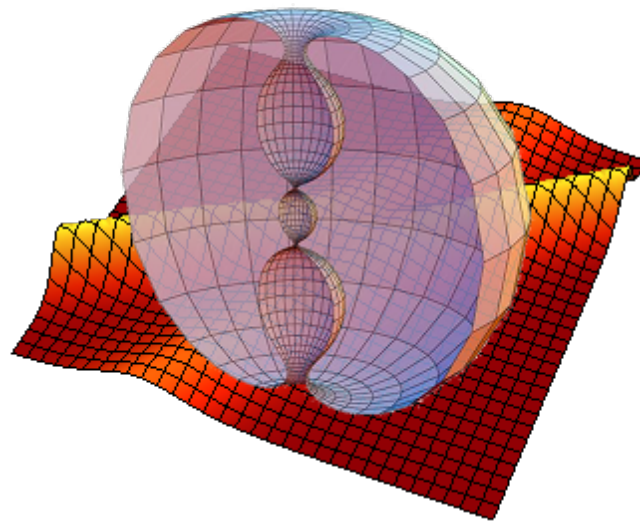
$$R_n = q_n - q_{n+1} = \log \frac{\tau_{n-1} \tau_{n+1}}{\tau_n^2}$$

- ✓ 相互作用をしても波の速度・振幅は変わらない
- ✓ 非線形相互作用の証拠に位相のずれ

粒子性を持つ波：ソリトン (soliton=solitary+on)

第 2 部

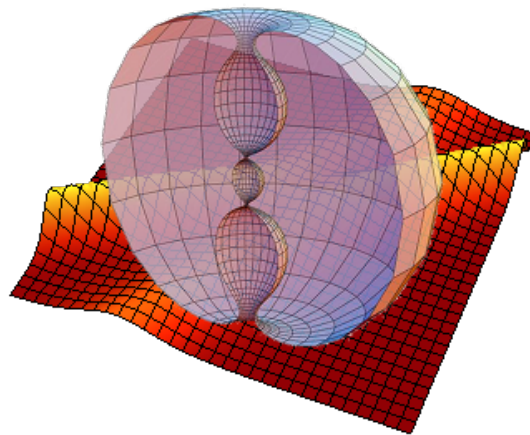
2次元戸田格子で学ぶ可積分系の数理



その1 : 2次元戸田格子とその性質

主要内容とキーワード

- ☞ 広田の方法でソリトン解を作る
- ☞ ソリトン解の行列式構造: τ 函数
- ☞ 双線形方程式 = 行列式の恒等式 : Plücker 関係式
- ☞ 分子解



$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}},$$

$$\frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = e^{r_{n+1}} + e^{r_{n-1}} - 2e^{r_n},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(1 + V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log(1 + V_n) = I_n - I_{n+1}, \quad \frac{\partial I_n}{\partial y} = V_{n-1} - V_n$$

双線形方程式：
$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - f(t) \tau_n^2$$

変数の間の関係：

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad r_n = q_n - q_{n+1} = \log \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}, \quad 1 + V_n = \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}, \quad I_n = \frac{\partial q_n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}$$

戸田格子方程式との関係： $t = x + y$, $s = x - y$ として条件 $\frac{\partial q_n}{\partial s} = 0$ を課す：

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) q_n = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2, \quad \tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \dots$$

$$O(\epsilon): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(1)} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}$$

$$O(\epsilon^2): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(2)} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2}$$

$$O(\epsilon^3): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(3)} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} f_n^{(2)}$$

1-ソリトン解: $f_n^{(1)} = R_1^{2n} e^{P_1 x + Q_1 y} = e^{\zeta_1}, \quad \zeta_1 = 2n \log R_1 + P_1 x + Q_1 y (+\zeta_{10})$

$$O(\epsilon): \quad P_1 Q_1 = R_1^2 + \frac{1}{R_1^2} - 2 = \left(R_1 - \frac{1}{R_1}\right)^2$$

$$O(\epsilon^2): \quad f_n^{(2)''} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2} = 0 \rightarrow \boxed{f_n^{(2)} = 0}$$

$$\text{1-ソリトン解: } \tau_n = 1 + R_1^{2n} e^{P_1 x + Q_1 y}, \quad P_1 Q_1 = \left(R_1 - \frac{1}{R_1}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2, \quad \tau_n = 1 + \epsilon f_n^{(1)} + \epsilon^2 f_n^{(2)} + \epsilon^3 f_n^{(3)} + \dots$$

$$O(\epsilon): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(1)} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)}$$

$$O(\epsilon^2): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(2)} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} = -\frac{1}{2}D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2}$$

$$O(\epsilon^3): \quad \partial_x \partial_y f_n^{(3)} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} f_n^{(2)}$$

$$\text{1-ソリトン解: } \tau_n = 1 + R_1^{2n} e^{P_1 x + Q_1 y} = 1 + e^{\zeta_1}, \quad P_1 Q_1 = \left(R_1 - \frac{1}{R_1} \right)^2$$

問： 戸田格子の場合を参考にして，2次元戸田格子方程式の2-ソリトン解を求めて下さい。

ヒント： $f_n^{(1)} = e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}$, $\zeta_i = 2n \log R_i + P_i x + Q_i y (+\zeta_{i0})$ とおく。

解答例 (1)

$$f_n^{(1)} = e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}, \quad \zeta_i = 2n \log R_i + P_i x + Q_i y$$

$$O(\epsilon) : \quad \partial_x \partial_y f_n^{(1)} = f_{n+1}^{(1)} + f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} \quad \Longrightarrow \quad P_i Q_i = \left(R_i - \frac{1}{R_i} \right)^2$$

$$\begin{aligned} O(\epsilon^2) : \quad \partial_x \partial_y f_n^{(2)} - f_{n+1}^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} + 2f_n^{(2)} &= -\frac{1}{2} D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(1)} - f_n^{(1)2} \\ &= -\frac{1}{2} D_x D_y (e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}) \cdot (e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}) + (R_1^2 e^{\zeta_1} + R_2^2 e^{\zeta_2}) (R_1^{-2} e^{\zeta_1} + R_2^{-2} e^{\zeta_2}) \\ &\quad - (e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2})^2 \\ &= - \left[(P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2) - \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right] e^{\zeta_1 + \zeta_2} \end{aligned}$$

$f_n^{(2)} = A_{12} e^{\zeta_1 + \zeta_2}$ として, 左辺は

$$\text{左辺} = \left[(P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2) - \left(R_1 R_2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right)^2 \right] A_{12} e^{\zeta_1 + \zeta_2}$$

$$\Longrightarrow \quad f_n^{(2)} = A_{12} e^{\zeta_1 + \zeta_2}, \quad A_{12} = - \frac{\left[(P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2) - \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right]}{\left[(P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2) - \left(R_1 R_2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right)^2 \right]}$$

$$\begin{aligned}
 O(\epsilon^3) : \quad & \partial_x \partial_y f_n^{(3)} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = -D_x D_y f_n^{(1)} \cdot f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(1)} f_{n-1}^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} f_{n-1}^{(1)} - 2f_n^{(1)} f_n^{(2)} \\
 & = -D_x D_y (e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}) \cdot A_{12} e^{\zeta_1 + \zeta_2} + (R_1^2 e^{\zeta_1} + R_2^2 e^{\zeta_2}) A_{12} \frac{1}{R_1^2 R_2^2} e^{\zeta_1 + \zeta_2} + \left(\frac{1}{R_1^2} e^{\zeta_1} + \frac{1}{R_2^2} e^{\zeta_2} \right) A_{12} R_1^2 R_2^2 e^{\zeta_1 + \zeta_2} \\
 & \quad - 2(e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}) A_{12} e^{\zeta_1 + \zeta_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{右辺第1項} : \quad & D_x D_y (e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}) \cdot e^{\zeta_1 + \zeta_2} = D_x D_y e^{\zeta_1} \cdot e^{\zeta_1 + \zeta_2} + D_x D_y e^{\zeta_2} \cdot e^{\zeta_1 + \zeta_2} \\
 & = [P_1 - (P_1 + P_2)] [Q_1 - (Q_1 + Q_2)] e^{2\zeta_1 + \zeta_2} [P_2 - (P_1 + P_2)] [Q_2 - (Q_1 + Q_2)] e^{\zeta_1 + 2\zeta_2} \\
 & = P_2 Q_2 e^{2\zeta_1 + \zeta_2} + P_1 Q_1 e^{\zeta_1 + 2\zeta_2}
 \end{aligned}$$

$$\text{右辺} = A_{12} \left[\left\{ -P_2 Q_2 + \frac{1}{R_2^2} + R_2^2 - 2 \right\} e^{2\zeta_1 + \zeta_2} + \left\{ -P_1 Q_1 + \frac{1}{R_1^2} + R_1^2 - 2 \right\} e^{\zeta_1 + 2\zeta_2} \right] = 0 \quad \because P_i Q_i = \left(R_i - \frac{1}{R_i} \right)^2$$

$$O(\epsilon^3) : \quad \partial_x \partial_y f_n^{(3)} - f_{n+1}^{(3)} - f_{n-1}^{(3)} + 2f_n^{(3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_n^{(3)} = 0 \text{ と取れる!}}$$

同様にして $f_n^{(k)} = 0$ ($k = 3, 4, \dots$) が示され、以上より

$$\text{2-ソリトン解:} \quad \tau_n = 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + A_{12} e^{\zeta_1 + \zeta_2}, \quad A_{12} = - \frac{\left[(P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2) - \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right]}{\left[(P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2) - \left(R_1 R_2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right)^2 \right]}$$

✓ **3-ソリトン解:** $\tau_n = 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + e^{\zeta_3} + A_{12}e^{\zeta_1+\zeta_2} + A_{23}e^{\zeta_2+\zeta_3} + A_{13}e^{\zeta_1+\zeta_3} + A_{123}e^{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3},$

$$\zeta_i = 2n \log R_i + P_i x + Q_i y + \zeta_{i0}, \quad P_i Q_i = \left(R_i - \frac{1}{R_i} \right)^2,$$

$$A_{ij} = - \frac{\left[(P_i - P_j)(Q_i - Q_j) - \left(\frac{R_i}{R_j} - \frac{R_j}{R_i} \right)^2 \right]}{\left[(P_i + P_j)(Q_i + Q_j) - \left(R_i R_j - \frac{1}{R_i R_j} \right)^2 \right]}, \quad A_{123} = A_{12} A_{23} A_{13}$$

✓ **ソリトン解の上手なパラメータ付け (重要!)**

$$P_i = p_i - q_i, \quad Q_i = -\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}, \quad R_i = \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$P_i Q_i = (p_i - q_i) \left(-\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} \right) = \frac{p_i}{q_i} + \frac{q_i}{p_i} - 2 = \left(R_i - \frac{1}{R_i} \right)^2$$

$$A_{ij} = \frac{(p_i - q_i)(p_j - q_j)}{(p_i - q_j)(p_j - q_i)}$$

2-ソリトン解: $\tau_n = 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2},$

$$\eta_i = n \log p_i + p_i x - \frac{y}{p_i} + \eta_{0i}, \quad \xi_i = n \log q_i + q_i x - \frac{y}{q_i} + \xi_{0i}, \quad A_{12} = \frac{(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)}$$

2-ソリトン解は2×2行列式で表示できる！

$$\tau_n = 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \approx \begin{vmatrix} e^{\eta_1} + e^{\xi_1} & p_1 e^{\eta_1} + q_1 e^{\xi_1} \\ e^{\eta_2} + e^{\xi_2} & p_2 e^{\eta_2} + q_2 e^{\xi_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \quad \text{Casorati 行列式}$$

$$f_n^{(i)} = e^{\eta_i} + e^{\xi_i}, \quad \eta_i = n \log p_i + p_i x - \frac{y}{p_i} + \eta_{0i}, \quad \xi_i = n \log q_i + q_i x - \frac{y}{q_i} + \xi_{0i}.$$

✓ チェック：

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (e^{\eta_1} + e^{\xi_1})(p_2 e^{\eta_2} + q_2 e^{\xi_2}) - (e^{\eta_2} + e^{\xi_2})(p_1 e^{\eta_1} + q_1 e^{\xi_1}) \\ &= (p_2 - p_1)e^{\eta_1 + \eta_2} + (q_2 - p_1)e^{\eta_1 + \xi_2} + (p_2 - q_1)e^{\eta_2 + \xi_1} + (q_2 - q_1)e^{\xi_1 + \xi_2} \\ &\approx 1 + \frac{q_2 - p_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_1 - \xi_1} + \frac{p_2 - q_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \quad (\star) \end{aligned}$$

任意定数の自由度をうまく使う：

$$\begin{aligned} (q_2 - p_1)e^{\eta_1} &= e^{\eta_1 + \log(q_2 - p_1)} \rightarrow e^{\eta_1} & (p_2 - q_1)e^{\eta_2} &= e^{\eta_2 + \log(p_2 - q_1)} \rightarrow e^{\eta_2} \\ (q_2 - q_1)e^{\xi_1} &= e^{\xi_1 + \log(q_2 - q_1)} \rightarrow e^{\xi_1} & (q_2 - q_1)e^{\xi_2} &= e^{\xi_2 + \log(q_2 - q_1)} \rightarrow e^{\xi_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\star) &= 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \times \frac{(q_2 - q_1)^2}{(q_2 - p_1)(p_2 - q_1)} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \\ &= 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)}{(q_2 - p_1)(p_2 - q_1)} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} = (\text{左辺}) \end{aligned}$$

定理： 任意の自然数 N について, $N \times N$ Casorati 行列式

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}$$

は2次元戸田格子方程式の双線形形式

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$$

を満たす. ただし, $f_n^{(k)}$ ($k = 1, \dots, N$) は以下の線形微分差分方程式を満足する.

$$\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(k)}, \quad \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(k)}$$

注意： $f_n^{(k)} = p_k^n \exp\left(p_k x - \frac{y}{p_k} + \eta_{k0}\right) + q_k^n \exp\left(q_k x - \frac{y}{q_k} + \xi_{k0}\right) \implies N\text{-ソリトン解}$

✓ **ステップ1:** τ の微分 = 列のシフトした行列式 「微分公式」

Freeman-Nimmoの記法:

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} = | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1} |, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} f_{n+j}^{(1)} \\ f_{n+j}^{(2)} \\ \vdots \\ f_{n+j}^{(N)} \end{pmatrix}$$

命題 (微分公式) : 次の公式が成り立つ.

$$\tau_n = | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1} | \quad \partial_x \tau_n = | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N} |$$

$$\tau_{n+1} = | \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1}, \mathbf{N} | \quad -\partial_y \tau_n = | \mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1} |$$

$$\tau_{n-1} = | \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2} | \quad -(\partial_x \partial_y + 1) \tau_n = | \mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N} |$$

Casorati 行列式 (4):



✓ チェック： 左側の公式群は自明. 右側の方は $\frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(i)}$ に注意して

$$\begin{aligned}\partial_x \tau_n &= | \mathbf{0}', \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | + \dots + | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2', N-1 | + | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1' | \\ &= | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | + \dots + | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-1}, \mathbf{N-1} | + | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, \mathbf{N} | \\ &= \boxed{| \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, \mathbf{N} |}\end{aligned}$$

同様に $\frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(i)}$ に注意して

$$\begin{aligned}\partial_y \tau_n &= | \mathbf{0}', \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | + | \mathbf{0}, \mathbf{1}', \dots, N-2, N-1 | + \dots + | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1' | \\ &= - | \mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | - | \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, N-2, N-1 | - \dots - | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-2} | \\ &= \boxed{- | \mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 |}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_y \tau_n &= - | \mathbf{-1}', \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | - | \mathbf{-1}, \mathbf{1}', \dots, N-2, N-1 | + \dots + | \mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1' | \\ &= - | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | - | \mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, \mathbf{N} | \\ &= \boxed{-\tau_n - | \mathbf{-1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, \mathbf{N} |}\end{aligned}$$

✓ **ステップ2:** 2DTL の双線形形式 = 行列式の恒等式 「Plücker 関係式」

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n - \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \tau_n^2 = (\partial_x \partial_y \tau_n) \tau_n - (\partial_x \tau_n) (\partial_y \tau_n) - \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \tau_n^2 \\
 &= \left(-| \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | - | -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N | \right) \times | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | \\
 &\quad - | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N | \times \left(-| -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | \right) \\
 &\quad - | \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, N-1, N | \times | -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2 | \\
 &\quad + | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | \times | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | \\
 &= -| -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2 | \times | \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, N-1, N | \\
 &\quad + | -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 | \times | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N | \\
 &\quad - | -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N | \times | \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 |
 \end{aligned}$$

2DTL の双線形形式 \implies	$(*) \quad 0 =$	$ -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2 $	\times	$ \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1, N $
	$+$	$ \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 $	\times	$ -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N $
	$-$	$ \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N $	\times	$ -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 $

✓ (※)の証明の準備:

命題: 行列式の Laplace 展開

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$: $N \times N$ 行列
- $|A|_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l}$: A の第 i_1, \dots, i_l 行および第 j_1, \dots, j_l 列を選んで作られた $l \times l$ 小行列式
- $\overline{|A|}_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l}$: A から第 i_1, \dots, i_l 行と第 j_1, \dots, j_l 列を取り去って作られる $(N-l) \times (N-l)$ 小行列式

l 個の整数 i_1, \dots, i_l を $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N$ となるように選んで固定する. このとき,

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N} (-1)^{i_1 + \dots + i_l + j_1 + \dots + j_l} |A|_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l} \times \overline{|A|}_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l}$$

例: $l = 1, i_1 = 1$ とする. $|A|_{j_1}^{i_1} = a_{1j_1}$

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 \leq N} (-1)^{1+j_1} a_{1j_1} \times \overline{|A|}_{j_1}^1 = \sum_{1 \leq j_1 \leq N} a_{1j_1} \times A_{1j_1}, \quad A_{1j_1}: A \text{ の } (1, j_1) \text{ 余因子}$$

⇒ 「第1行に関する展開」

Casorati 行列式 (7):

天下りだが，以下の恒等的に 0 の $2N \times 2N$ 行列式を考える：

$$0 = \left| \begin{array}{c|ccc|c|cc} -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{N-2} & \emptyset & \emptyset & \mathbf{N-1} & \mathbf{N} \\ \hline -1 & & & \emptyset & & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{N-2} & \mathbf{N-1} & \mathbf{N} \end{array} \right|$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{N-1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{N-2}$

実際，右辺の下のブロックを (-1) 倍して上のブロックに足し込み，囲みのブロックを右隣のブロックに足し込めば

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \left| \begin{array}{c|ccc|c|cc} \emptyset & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{N-2} & \mathbf{-(1)} & \cdots & \mathbf{-(N-2)} & \emptyset & \emptyset \\ \hline -1 & & & \emptyset & & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{N-2} & \mathbf{N-1} & \mathbf{N} \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{c|ccc|c|cc} \emptyset & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{N-2} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline -1 & & & \emptyset & & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{N-2} & \mathbf{N-1} & \mathbf{N} \end{array} \right| \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{N-1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{N-2}$

この時点で $l = N, i_1 = 1, \dots, i_N = N$ として Laplace 展開を行う。上のブロックから N 列選び，下のブロックから残りの N 列を選び，全ての列の選び方について和を取る。しかし，上のブロックには要素が全て 0 の列が $N + 1$ 本あるため，どう選んでも 0 の列が入る。従って，展開の全ての項が 0 となる。

✓ Plücker 関係式は無限個ある

- ☞ 特別視する列ベクトル $-1, 0, N-1, N$ をどう選んでもよい
- ☞ 特別視する列の本数は4本以上なら何本でもよい

✓ τ に適当な微差分構造を入れると、列を任意にシフトさせた行列式は τ に微分作用素を作用させて得られる

例：無限個の独立変数 $x_j, y_j (j = 1, 2, \dots)$ を導入. $\frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_j} = f_{n+j}^{(i)}, \quad \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial y_j} = -f_{n-j}^{(i)}$

✓ 無限個の Plücker 関係式 \iff 解を共有する無限個の双線形微分差分方程式 (上の微差分構造では) 「2次元戸田格子階層(hierarchy)」 $x_j (y_j)$ のみを使って方程式を記述すれば 「KP階層」

「佐藤理論」:

- ✓ ソリトン方程式の解空間は普遍グラスマン多様体である
- ✓ τ 関数 (双線形形式の解) は Plücker 座標である

✓ Casorati 行列式解 : 離散変数 $n =$ ソリトンの位相

✓ 分子解 (molecule solution) : 離散変数 $n =$ 行列式のサイズ

定理 : 任意の自然数 n について, $n \times n$ 2方向 Wronski 行列式

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f(x, y) & \partial_x f(x, y) & \cdots & \partial_x^{n-1} f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) & \partial_x \partial_y f(x, y) & \cdots & \partial_x^{n-1} \partial_y f(x, y) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_y^{n-1} f(x, y) & \partial_x \partial_y^{n-1} f(x, y) & \cdots & \partial_x^{n-1} \partial_y^{n-1} f(x, y) \end{vmatrix} \quad f(x, y) : \text{任意関数}$$

は2次元戸田格子方程式の双線形形式を満たす.

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{初期(境界)条件 : } \tau_{-1} = 0, \quad \tau_0 = 1, \quad \tau_1 = f.$$

✓ **注意 :** 上の境界条件は非線形変数のレベルで以下の条件に対応

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} : q_0 = -\infty, \quad r_n = \log \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2} : r_0 = -\infty, \quad 1 + V_n = \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2} : 1 + V_0 = 0$$

分子解 (3)

各因子を τ で表す :

$$| \mathbf{0}, \dots, n-2, \phi_1, \phi_2 | = \begin{vmatrix} f & \dots & \partial_x^{n-2} f & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-2} f & 0 & 0 \\ \partial_y^{n-1} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-1} f & 1 & 0 \\ \partial_y^n f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^n f & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & \dots & \partial_x^{n-2} f \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-2} f \end{vmatrix} = \tau_{n-1}$$

$$| \mathbf{0}, \dots, n-2, n-1, \phi_1 | = \begin{vmatrix} f & \dots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^{n-1} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-2} f & \partial_x^{n-1} \partial_y^{n-2} f & 0 \\ \partial_y^{n-1} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-1} f & \partial_x^{n-1} \partial_y^{n-1} f & 1 \\ \partial_y^n f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^n f & \partial_x^{n-1} \partial_y^n f & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f & \dots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^{n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-2} f & \partial_x^{n-1} \partial_y^{n-2} f \\ \partial_y^n f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^n f & \partial_x^{n-1} \partial_y^n f \end{vmatrix}$$

$$= -\partial_y \tau_n$$

$$\begin{aligned}
 | \mathbf{0}, \dots, n-2, n, \phi_2 | &= \begin{vmatrix} f & \dots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^n & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-1} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-1} f & \partial_x^n \partial_y^{n-1} f & 0 \\ \partial_y^n f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^n f & \partial_x^n \partial_y^n f & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & \dots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^n \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-1} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-1} f & \partial_x^n \partial_y^{n-1} f \end{vmatrix} \\
 &= \partial_x \tau_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 | \mathbf{0}, \dots, n-2, n, \phi_1 | &= \begin{vmatrix} f & \dots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^n & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-2} f & \partial_x^{n-1} \partial_y^{n-2} f & 0 \\ \partial_y^{n-1} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-1} f & \partial_x^n \partial_y^{n-1} f & 1 \\ \partial_y^n f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^n f & \partial_x^n \partial_y^n f & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f & \dots & \partial_x^{n-2} f & \partial_x^n \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \partial_y^{n-2} f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^{n-2} f & \partial_x^{n-1} \partial_y^{n-2} f \\ \partial_y^n f & \dots & \partial_x^{n-2} \partial_y^n f & \partial_x^n \partial_y^n \end{vmatrix} \\
 &= -\partial_x \partial_y \tau_n
 \end{aligned}$$

Plücker 関係式 :

$$\begin{aligned}
 0 &= | \mathbf{0}, \dots, n-2, n-1, n | \times | \mathbf{0}, \dots, n-2, \phi_1, \phi_2 | \\
 &\quad - | \mathbf{0}, \dots, n-2, n-1, \phi_1 | \times | \mathbf{0}, \dots, n-2, n, \phi_2 | \\
 &\quad + | \mathbf{0}, \dots, n-2, n-1, \phi_2 | \times | \mathbf{0}, \dots, n-2, n, \phi_1 | \\
 &= \begin{matrix} \tau_{n+1} \\ - \\ \tau_n \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau_{n-1} \\ \partial_x \tau_n \\ (-\partial_x \partial_y \tau_n) \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\partial_x \partial_y \tau_n) \tau_n - (\partial_x \tau_n) (\partial_y \tau_n) = \tau_{n+1} \tau_{n-1} \quad \mathbf{2DTL}$$

注意 :

✓ 分子解は半無限格子の解だが, 有限格子に制限することもできる.

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N X_i(x) Y_i(y) \quad \rightarrow \quad \tau_N = \begin{vmatrix} Y_1 & \cdots & Y_N \\ \partial_y Y_1 & \cdots & \partial_y Y_N \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_y^{N-1} Y_1 & \cdots & \partial_y^{N-1} Y_N \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 & \partial_x X_1 & \cdots & \partial_x^{N-1} X_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_N & \partial_x X_N & \cdots & \partial_x^{N-1} X_N \end{vmatrix} = Y(y) \times X(x)$$

$$\Rightarrow \tau_{N+1} = 0 \quad (\because \text{2DTL または 「Binet-Cauchy の公式」}) \quad \Rightarrow \quad n = 1, \dots, N \text{ の有限格子}$$

✓ **2DTL と射影微分幾何** : 2次元戸田格子

$$\frac{\partial^2 \log h_n}{\partial x \partial y} = h_{n+1} + h_{n-1} - 2h_n, \quad h_n = \frac{\tau_{n-1} \tau_{n+1}}{\tau_n^2},$$

は実射影空間中で「共役網」と呼ばれる座標系を許容する曲面の変換を記述する (Darboux(1889): 井ノ口さんの講演). 半無限格子上の分子解も Darboux によって見いだされている.

✓ **1DTL の分子解** :

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f(t) & \cdots & \partial_t^{n-1} f(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_t^{n-1} f(t) & \cdots & \partial_t^{2n-2} f(t) \end{vmatrix} \longrightarrow (\partial_t^2 \tau_n) \tau_n - (\partial_t \tau_n)^2 = \tau_{n+1} \tau_{n-1}, \quad \tau_{-1} = 0, \quad \tau_0 = 1, \quad \tau_1 = f(t)$$

有限格子 : $f(t) = \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t + \mu_i}$ と置けばよい.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \log V_n = I_n - I_{n+1}, \\ \frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n \end{cases} \quad \begin{cases} V_n = \frac{\tau_{n-1} \tau_{n+1}}{\tau_n^2} \\ I_n = \frac{d}{dt} \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \end{cases} \quad V_0 = 0, \quad V_N = 0 \longrightarrow$$

回路のショート
 $V_n \rightarrow 0$ に収束して終わり
 \Downarrow
Lax 行列が対角行列に収束
 \rightarrow 固有値計算アルゴリズム

その2：簡約

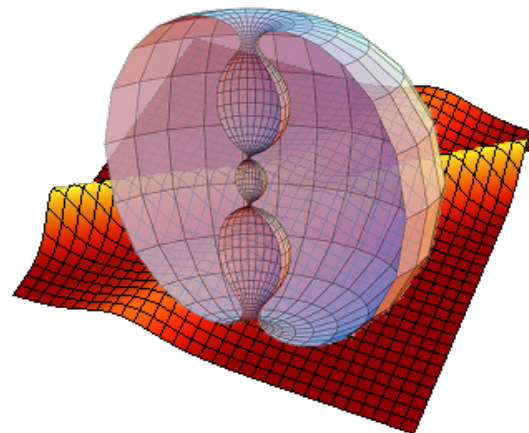
主要内容とキーワード

☞ 簡約

解のパラメータに制限を加え、方程式を制限する(新しい方程式を得る)操作

☞ sine-Gordon 方程式, 1次元戸田格子方程式

☞ 解のレベルでの簡約



簡約 (reduction) :

解のパラメータに制限を加えることで, 方程式を制限する(新しい方程式を得る)操作

✓ **2DTL \implies 1DTL :** $t = x + y, s = x - y$ として条件 $\frac{\partial q_n}{\partial s} = 0$ を課す

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) q_n = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}}}$$

✓ **2DTL \implies sinh-Gordon :** 2周期性 $q_n = q_{n+2}$ を課す.

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 q_0}{\partial x \partial y} = e^{q_1-q_0} - e^{q_0-q_1} \\ \frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial y} = e^{q_0-q_1} - e^{q_1-q_0} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 2(e^{-v} - e^v), \quad v := q_0 - q_1$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -4 \sinh v}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -4 \sin \theta}$$

sinh-Gordon 方程式

sine-Gordon 方程式 $v = i\theta \in i\mathbb{R}$

(離散)微分幾何で重要なプレイヤー!

簡約 (reduction) : 解のパラメータに制限を加えることで, 方程式を制限する操作

τ 関数のレベルの制限で条件 $\frac{\partial q_n}{\partial s} = 0$ ($t = x + y, s = x - y$) を実現する × $x = y = t$!!

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \implies \partial_s q_n = \frac{\partial_s \tau_{n-1}}{\tau_{n-1}} - \frac{\partial_s \tau_n}{\tau_n} = 0 \implies \boxed{\partial_s \tau_n = \text{const.} \times \tau_n}$$

ソリトン解 : $\tau_n = \det \left(f_{n+j-1}^{(i)} \right)_{i,j=1,\dots,N}$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k}} + q_k^n e^{q_k x - \frac{y}{q_k}} = p_k^n \exp \left[\frac{1}{2} \left(p_k - \frac{1}{p_k} \right) t + \frac{1}{2} \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right) s \right] + q_k^n \exp \left[\frac{1}{2} \left(q_k - \frac{1}{q_k} \right) t + \frac{1}{2} \left(q_k + \frac{1}{q_k} \right) s \right]$$

$$\rightarrow \partial_s f_n^{(k)} = \frac{1}{2} \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right) p_k^n \exp \left[\frac{1}{2} \left(p_k - \frac{1}{p_k} \right) t + \frac{1}{2} \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right) s \right] + \frac{1}{2} \left(q_k + \frac{1}{q_k} \right) q_k^n \exp \left[\frac{1}{2} \left(q_k - \frac{1}{q_k} \right) t + \frac{1}{2} \left(q_k + \frac{1}{q_k} \right) s \right]$$

$$\rightarrow p_k + \frac{1}{p_k} = q_k + \frac{1}{q_k} \implies (p_k - q_k) \left(1 - \frac{1}{p_k q_k} \right) = 0 \implies \boxed{q_k = \frac{1}{p_k}}, \quad \partial_s f_n^{(k)} = \frac{1}{2} \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right) f_n^{(k)}$$

$$\implies \partial_s \tau_n = C_N \tau_n, \quad C_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{1}{p_i} \right)$$

双線形方程式： $t = x + y, \quad s = x - y, \quad \partial_s \tau_n = C_N \tau_n, \quad C_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{1}{p_i} \right)$

2DTL $(\partial_x \partial_y \tau_n) \tau_n - (\partial_x \tau_n) (\partial_y \tau_n) = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$

左辺 = $(\partial_t^2 - \partial_s^2) \tau_n \times \tau_n - (\partial_t - \partial_s) \tau_n \times (\partial_t + \partial_s) \tau_n = (\partial_t^2 - C_N^2) \tau_n \times \tau_n - (\partial_t - C_N) \tau_n \times (\partial_t + C_N) \tau_n$

= $(\partial_t^2 \tau_n) \tau_n - (\partial_t \tau_n)^2 \implies \boxed{(\partial_t^2 \tau_n) \tau_n - (\partial_t \tau_n)^2 = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2}$ **1DTL!**

1DTLの双線形形式と Casorati 行列式解： $\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix},$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{\frac{t}{2} \left(p_k - \frac{1}{p_k} \right) + \eta_{k0}} + p_k^{-n} e^{-\frac{t}{2} \left(p_k - \frac{1}{p_k} \right) + \xi_{k0}}$$

τ 関数のレベルの制限で条件 $q_{n+2} = q_n$ を実現する

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \implies \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_{n+2}} = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \implies \boxed{\tau_{n+2} = \text{const.} \times \tau_n}$$

ソリトン解: $\tau_n = \det \left(f_{n+j-1}^{(i)} \right)_{i,j=1,\dots,N}$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k}} + q_k^n e^{q_k x - \frac{y}{q_k}} \rightarrow f_{n+2}^{(k)} = p_k^2 p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k}} + q_k^2 q_k^n e^{q_k x - \frac{y}{q_k}} \propto f_n^{(k)} \rightarrow p_k^2 = q_k^2$$

$$\rightarrow \boxed{q_k = -p_k} \rightarrow f_{n+2}^{(k)} = p_k^2 f_n^{(k)} \implies \tau_{n+2} = \lambda \tau_n, \quad \lambda = \prod_{i=1}^N p_i^2$$

双線形方程式: $v = q_0 - q_1 = \log \frac{\tau_{-1}\tau_1}{\tau_0^2} = \log \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - \log \lambda$

$$\text{2DTL} \quad \frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2 \implies \begin{cases} \frac{1}{2} D_x D_y \tau_0 \cdot \tau_0 = \frac{1}{\lambda} \tau_1^2 - \tau_0^2 \\ \frac{1}{2} D_x D_y \tau_1 \cdot \tau_1 = \lambda \tau_0^2 - \tau_1^2 \end{cases} \quad \text{sinh-Gordon}$$

sinh-Gordon の双線形形式と Casorati 行列式解 : $v_{xy} = -4 \sinh v, \quad v = 2 \log \frac{\tau_1}{\tau_0} - \log \lambda$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} D_x D_y \tau_0 \cdot \tau_0 = \frac{1}{\lambda} \tau_1^2 - \tau_0^2 \\ \frac{1}{2} D_x D_y \tau_1 \cdot \tau_1 = \lambda \tau_0^2 - \tau_1^2 \end{cases} \quad \tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix},$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n e^{p_k x - \frac{y}{p_k} + \eta_{k0}} + (-p_k)^n e^{-\left(p_k x - \frac{y}{p_k}\right) + \xi_{k0}}, \quad \lambda = \prod_{i=1}^N p_i^2$$

✓ **sine-Gordon 方程式への簡約 :**

sinh-Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -4 \sinh v$$

$$\longrightarrow v = i\theta \in i\mathbb{R} \longrightarrow$$

sine-Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -4 \sin \theta$$

v を純虚数とする特殊化を行列式解のレベルで実現する方法は自明ではない

Gram 行列式表示が便利 ! (太田さんの講演)

Casorati 行列式表示では $\eta_{k0} = -\xi_{k0} = \frac{\pi i}{4}$ と取ればよいことがわかっている (証明は簡単ではない)

その3 : Bäcklund 変換

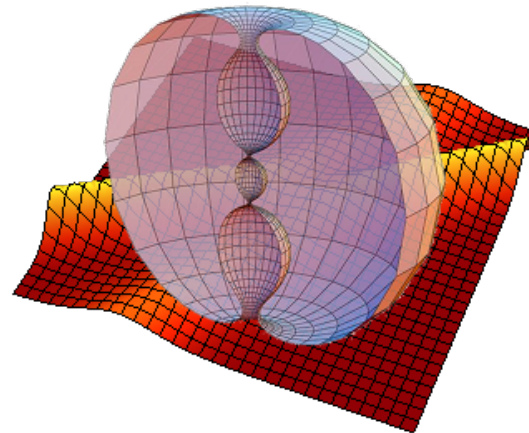
主要内容とキーワード

☞ 双線形形式の算術で Bäcklund 変換を作る

1次元戸田格子方程式, 2次元戸田格子方程式, sine-Gordon 方程式

☞ Bäcklund 変換から Lax 形式を作る

☞ Bäcklund 変換で新しい解を作る



定理 (1次元戸田格子の Bäcklund 変換) : τ_n を

$$\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2 \quad (\star)$$

を満たすものとする. このとき, 定数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対して, $\bar{\tau}_n$ が

$$\begin{aligned} D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n &= \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \\ D_t \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n &= -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \end{aligned} \quad (\star)$$

を満たすならば, $\bar{\tau}_n$ も (\star) の解である. 逆に, $\bar{\tau}_n$ が (\star) を満たし, τ_n が (\star) を満たすならば, τ_n も (\star) の解である.

✓ **証明 :**

$$P = \left[\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n - \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \tau_n^2 \right] (\bar{\tau}_n)^2 - (\tau_n)^2 \left[\frac{1}{2} D_x D_y \bar{\tau}_n \cdot \bar{\tau}_n - \bar{\tau}_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} + (\bar{\tau}_n)^2 \right]$$

τ_n が (\star) を, $\bar{\tau}_n$ が (\star) を満たすときに, $P = 0$ を示せばよい.

鍵： 広田微分の「交換公式」

命題： 任意の $x, y, \tau_n, \bar{\tau}_n$ に関して以下の公式が成り立つ.

$$(1) \quad \left[D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n \right] \tau_n^2 - (\tau_n)^2 \left[D_x D_y \bar{\tau}_n \cdot \bar{\tau}_n \right] = 2D_x \left(D_y \tau_n \cdot \bar{\tau}_n \right) \cdot \bar{\tau}_n \tau_n,$$

$$(2) \quad D_x (\tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1}) \cdot (\bar{\tau}_n \tau_n) = \left[D_x \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n \right] \bar{\tau}_{n-1} \tau_n + \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \left[D_x \bar{\tau}_{n-1} \cdot \tau_n \right]$$

上の公式は直接計算でチェックできる. 同様の公式の「効率的な」生成法は広田 (1992) を参照.

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n - \tau_{n+1} \tau_{n-1} + \tau_n^2 \right] (\bar{\tau}_n)^2 - (\tau_n)^2 \left[\frac{1}{2} D_t^2 \bar{\tau}_n \cdot \bar{\tau}_n - \bar{\tau}_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} + (\bar{\tau}_n)^2 \right] \\ &= D_t \left[D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n \right] \cdot \bar{\tau}_n \tau_n + \tau_n \bar{\tau}_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} \tau_n + \tau_{n-1} \bar{\tau}_n \bar{\tau}_n \tau_{n+1} \quad \because \text{交換公式 (1)} \\ &= D_t \left[D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n - \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} \right] \cdot \bar{\tau}_n \tau_n + \lambda_1 \left[D_x \bar{\tau}_{n+1} \cdot \tau_n + \lambda_1^{-1} \bar{\tau}_n \tau_{n+1} \right] \tau_{n-1} \bar{\tau}_n + \lambda_1 \left[D_x \tau_n \cdot \bar{\tau}_{n-1} + \lambda_1^{-1} \tau_{n-1} \bar{\tau}_n \right] \bar{\tau}_n \tau_{n+1} \\ &\quad \because \text{交換公式 (2)} \end{aligned}$$

これより

$$D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n - \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} = -\lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \quad \longleftarrow \text{第1項: } D_t f \cdot f = 0 \text{ より}$$

$$D_t \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \quad \longleftarrow \text{第2,3項: } \lambda_3 \text{ の項は打ち消し合う}$$

であれば $P = 0$ が成り立つ.

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad \bar{q}_n = \log \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\bar{\tau}_n}, \quad \mathbf{1DTL}: \frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}}$$

Bäcklund 変換 :

$$\begin{aligned} D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n &= \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \\ D_t \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n &= -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} (\log \tau_n)' - (\log \bar{\tau}_n)' &= \lambda_1 \frac{\tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1}}{\tau_n \bar{\tau}_n} - \lambda_2 \\ (\log \tau_{n+1})' - (\log \bar{\tau}_n)' &= -\frac{1}{\lambda_1} \frac{\tau_n \bar{\tau}_{n+1}}{\tau_{n+1} \bar{\tau}_n} + \lambda_3 \end{aligned}$$

(上)_{n-1} - (下)_{n-1}:

$$\left(\log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \right)' = \lambda_1 \frac{\tau_n \bar{\tau}_{n-2}}{\tau_{n-1} \bar{\tau}_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\tau_{n-1} \bar{\tau}_n}{\tau_n \bar{\tau}_{n-1}} - \lambda_2 + \lambda_3 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{dq_n}{dt} = \lambda_1 e^{-q_n + \bar{q}_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_1} e^{q_n - \bar{q}_n} - \lambda_2 + \lambda_3}$$

(上)_n - (下)_{n-1}:

$$\left(\log \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\bar{\tau}_n} \right)' = \lambda_1 \frac{\tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1}}{\tau_n \bar{\tau}_n} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\tau_{n-1} \bar{\tau}_n}{\tau_n \bar{\tau}_{n-1}} - \lambda_2 + \lambda_3 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{d\bar{q}_n}{dt} = \lambda_1 e^{-q_{n+1} + \bar{q}_n} + \frac{1}{\lambda_1} e^{q_n - \bar{q}_n} - \lambda_2 + \lambda_3}$$

最初に示した Bäcklund 変換と同じ !

Bäcklund 変換から Lax 形式を生み出す :

$\bar{\tau}_n = \tau_n \Psi_{n+1} \text{ とおけ!}$

$$D_t \tau_n \cdot \bar{\tau}_n = \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \qquad \tau'_n(\tau_n \Psi_{n+1}) - \tau_n(\Psi_{n+1} \tau_n)' = \lambda_1 \tau_{n+1} \tau_{n-1} \Psi_n - \lambda_2 \tau_n^2 \Psi_{n+1}$$

$$D_t \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \qquad \longrightarrow \qquad \tau'_{n+1}(\Psi_{n+1} \tau_n) - \tau_{n+1}(\Psi_{n+1} \tau_n)' = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \tau_{n+1} \Psi_{n+2} + \lambda_3 \tau_{n+1} \tau_n \Psi_{n+1}$$

$$-\Psi'_{n+1} = \lambda_1 \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2} \Psi_n - \lambda_2 \Psi_{n+1} \qquad \Psi'_n = -\lambda_1(1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} + \lambda_2 \Psi_n$$

$$\longrightarrow -\Psi'_{n+1} + \left(\log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right)' \Psi_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_1} \Psi_{n+2} + \lambda_3 \Psi_{n+1} \qquad \longrightarrow \qquad \Psi'_n = -(I_n + \lambda_3) \Psi_n + \frac{1}{\lambda_1} \Psi_{n+1}$$

$$\longrightarrow \lambda_1(1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} - I_n \Psi_n + \frac{1}{\lambda_1} \Psi_{n+1} = (\lambda_2 + \lambda_3) \Psi_n$$

$$\Psi'_n = -\lambda_1(1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} + \lambda_2 \Psi_n$$

$$\longrightarrow \begin{aligned} (1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} + I_n \Psi_n + \Psi_{n+1} &= \lambda \Psi_n \\ \Psi'_n &= (1 + V_{n-1}) \Psi_{n-1} \end{aligned}$$

Lax 形式!

ただし $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda.$

または $(-\lambda_1)^n e^{\lambda_2 t} \Psi_n \rightarrow \Psi_n, \quad \lambda_3 = -\lambda.$

定理 (2次元戸田格子の Bäcklund 変換) : τ_n を

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2 \quad (\star)$$

を満たすものとする。このとき、定数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対して、 $\bar{\tau}_n$ が

$$\begin{aligned} D_y \tau_n \cdot \bar{\tau}_n &= \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \\ D_x \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n &= -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \end{aligned} \quad (\star)$$

を満たすならば、 $\bar{\tau}_n$ も (\star) の解である。逆に、 $\bar{\tau}_n$ が (\star) を満たし、 τ_n が (\star) を満たすならば、 τ_n も (\star) の解である。

問 : 1次元戸田格子の場合を参考にして、上の定理を導いて下さい。

✓ τ_n として Casorati 行列式解を考える :

$$\tau_n(N) = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \partial_x f_n^{(k)} &= f_{n+1}^{(k)} \\ \partial_y f_n^{(k)} &= -f_{n-1}^{(k)} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau}_n = \tau_n(N+1) \text{ という解がある!}$$

2DTL の双線形形式は以下の行列式の Laplace 展開から得られた :

$$0 = \begin{vmatrix} \color{red}{-1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \cdots & \color{red}{N-2} & \color{red}{\emptyset} & \color{red}{N-1} & \color{red}{N} \\ \color{red}{-1} & & & & \color{red}{\emptyset} & \color{red}{1} & \cdots & \color{red}{N-2} & \color{red}{N-1} & \color{red}{N} \end{vmatrix}$$

オレンジの部分を少し修正 :

$$0 = \begin{vmatrix} \color{red}{-1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \cdots & \color{red}{N-2} & \color{red}{\emptyset} & \color{red}{N-1} & \color{red}{\phi_2} \\ \color{red}{-1} & & & & \color{red}{\emptyset} & \color{red}{1} & \cdots & \color{red}{N-2} & \color{red}{N-1} & \color{red}{\phi_2} \end{vmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Laplace 展開 :

$$\begin{aligned} 0 &= \color{red}{|-1, 0, 1, \dots, N-2|} \times \color{red}{|1, \dots, N-2, N-1, \phi_2|} \\ &+ \color{red}{|0, 1, \dots, N-2, N-1|} \times \color{red}{|-1, 1, \dots, N-2, \phi_2|} \\ &- \color{red}{|0, 1, \dots, N-2, \phi_2|} \times \color{red}{|-1, 1, \dots, N-2, N-1|} \end{aligned}$$

$$\implies 0 = \tau_{n-1}(N) \times \tau_{n+1}(N-1) + \tau_n(N) \times (-\partial_y \tau_n(N-1)) - \tau_n(N-1) \times (-\partial_y \tau_n(N))$$

$$\implies \boxed{D_y \tau_n(N) \cdot \tau_n(N+1) = \tau_{n+1}(N) \tau_{n-1}(N+1)} \quad \tau_n = \tau_n(N), \bar{\tau}_n = \tau_n(N+1), \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

✓ **2次元戸田格子方程式の Lax 形式 :** $\bar{\tau}_n = \tau_n \Psi_{n+1}$

$$\begin{cases} \partial_y \Psi_n = -\lambda_1(1 + V_{n-1})\Psi_{n-1} + \lambda_2 \Psi_n \\ \partial_x \Psi_n = -(I_n + \lambda_3)\Psi_n + \frac{1}{\lambda_1} \Psi_{n+1} \end{cases} \quad \text{両立条件} \quad \partial_x(\partial_y \Psi_n) = \partial_y(\partial_x \Psi_n) \quad \rightarrow \quad \text{2DTL}$$

✓ **Bäcklund 変換の簡約 :** 方程式の簡約と同じようにすればよい

☞ **1DTL :** $t = x + y, s = x - y$ として s 依存性を落とす

☞ **sinh-Gordon, sine-Gordon :** 2周期性を入れる

sine-Gordon 方程式の Bäcklund 変換 : (A.V Bäcklund, 1875)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta - \bar{\theta}}{2}\right)_y &= -2\lambda_1 \sin \frac{\theta + \bar{\theta}}{2} & \theta_{xy} &= -4 \sin \theta \\ \left(\frac{\theta + \bar{\theta}}{2}\right)_x &= -\frac{2}{\lambda_1} \sin \frac{\theta - \bar{\theta}}{2} & \bar{\theta}_{xy} &= -4 \sin \bar{\theta} \end{aligned} \quad \rightarrow$$

ユークリッド空間中の負の定曲率曲面の変換 (ラスマンさんの講演!)

✓ 離散可積分系入門 (寛)

チュートリアルの基本講義第2弾. 解の構造を保ったまま (可積分性を保ったまま) 微分方程式を差分方程式に拡張します.

✓ 差分戸田方程式と差分射影微分幾何 (井ノ口)

2次元戸田格子方程式は射影微分幾何の枠組みで, ある曲面の変換を表す重要な方程式です. 離散化された2次元戸田格子方程式が自然に現れるような, 離散化された射影微分幾何を議論します.

✓ Darboux 変換入門 (ウィロックス)

Darboux 変換と呼ばれる線形方程式系 (Lax形式) の古典的な変換を用いて, Bäcklund 変換より一般的な変換が得られます. 幾何学的には曲面の変換を記述し, 可積分系の立場からは非常に一般的な解の行列式表示を得る方法とも見なせます. これらの変換と離散時間発展は密接な関係があります.

✓ 可積分系の厳密解と Gram 行列式(太田)

可積分系を応用する際に, 例えば sinh-Gordon 方程式から sine-Gordon 方程式を得るときのように解に純虚数であることを要請したり, ある変数と別の変数が複素共役であるという条件を課したり, または空間に対称性を入れたりすることが必要な場合があります. しかし, そのような場合に解を具体的に作ることはしばしば容易ではありません. そのようなとき, Casorati 行列式でなく, 解の Gram 行列式表示を用いると便利です. この講義では Gram 行列式の技法の入門を行います.

✓ 平面曲線の離散微分幾何 (松浦)

本格的な離散微分幾何の入門として、まずは取り扱いやすい平面曲線の幾何とその離散化を議論します。(modified) Korteweg-de Vries 方程式などの可積分系の基本方程式が自然に現れる様子と、離散可積分系とうまく整合性の取れた幾何の枠組みが講義されます。

✓ 離散的な微分幾何学と曲面論 (ラスマン)

チュートリアルの中核をなす入門講義で、曲面・離散曲面論の入門を行います。例えば平均曲率曲面や負の定曲率曲面で sinh-Gordon 方程式や sine-Gordon 方程式が重要な役割を果たします。また、離散微分幾何ではそれらの方程式の離散化バージョンが自然に現れます。可積分系の理論と微分幾何のコラボレーションを楽しみ、将来の応用の可能性を想像してみてください。