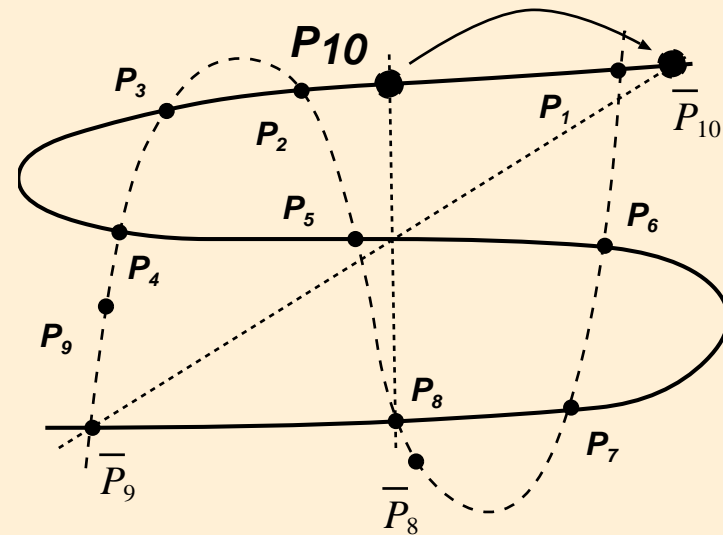
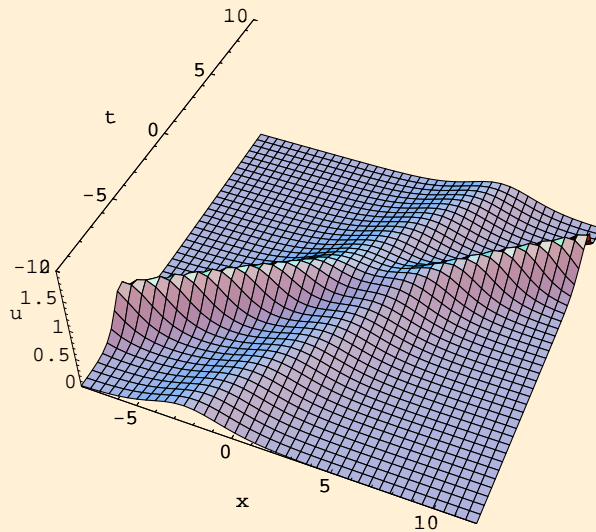


専攻分野紹介：可積分系

梶原 健司 (九大数理)

九州大学大学院数理学府 修士課程入試説明会

2007.6.24 大阪会場(新梅田研修センター)



可積分系とは：明確な定義はない。

通常「解けない」「うまくいかない」ことが、背後の数理的からくりによって奇跡的に解けたりうまくいったりする場合、その系を「可積分系」と呼ぶことが多い。

✓ 古典力学の完全可積分系 (Liouville-Arnold)

自由度 n の Hamilton 系に n 個の独立な保存量 → 求積法で初期値問題が解ける

※ 求積法：四則演算・微分積分・逆関数・微積分を含まない方程式を解くこと

✓ ソリトン系 (非線形波動「ソリトン」を記述する偏微分方程式のファミリー)

本来そう簡単に解けないはずの非線形偏微分方程式の初期値問題が厳密に解ける

そう簡単に求まらないはずの厳密解がざくざく求まる

✓ パンルヴェ系 (ある非線形常微分方程式のファミリー：解は特殊函数の一般化)

本来そう簡単にできないはずの「解けない」ことの証明ができてしまう。

✓ 可解格子模型・共形場理論など

本来そう簡単に求まらないはずの物理量（相関函数など）が厳密に求まる。

背後には奇跡的な数理的からくり：「無限の対称性」に支えられた「無限」

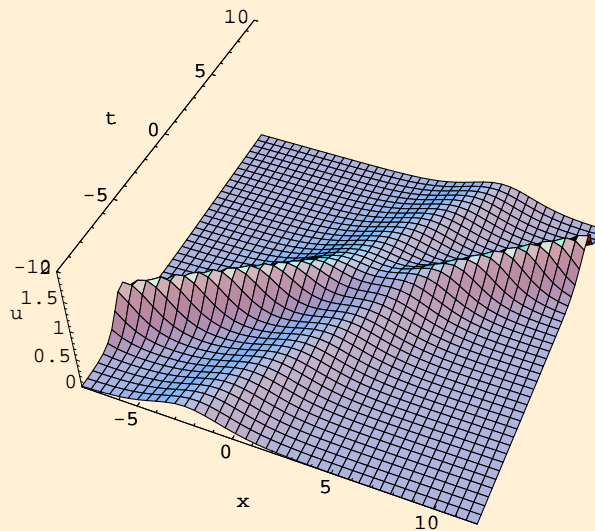
例：ソリトン系

KdV 方程式： $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$

x : 空間, t : 時間, $u = u(x, t)$: 波の振幅

- ☞ 粒子的性質を持った孤立波解
solitary + on = soliton
- ☞ ソリトンの相互作用を記述する厳密解

- ✓ 「孤立波」そのものが物理的に異常
- ✓ 非線形PDEが厳密に解けることが異常



例：ソリトン系

KdV 方程式： $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$

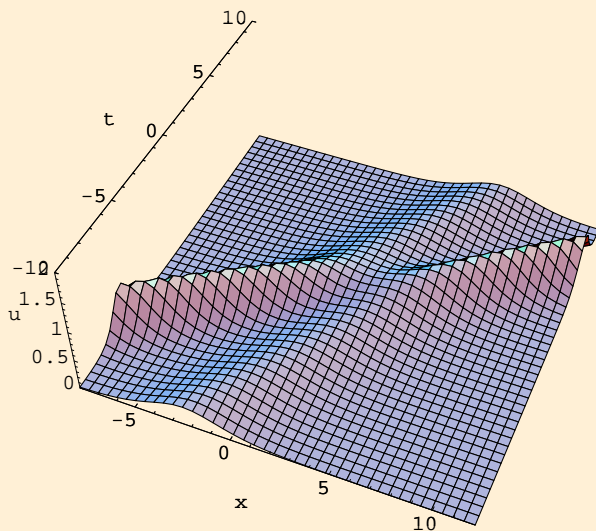
x : 空間, t : 時間, $u = u(x, t)$: 波の振幅

☞ 粒子的性質を持った孤立波解

solitary + on = soliton

☞ ソリトンの相互作用を記述する厳密解

- ✓ 「孤立波」そのものが物理的に異常
- ✓ 非線形PDEが厳密に解けることが異常



線形バージョン： $u_t + u_{xxx} = 0$

☞ $\sin(kx + k^3 t)$, $\cos(kx + k^3 t)$ は解.

☞ 線形 → それらの重ね合わせも解.

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \cos(kx + k^3 t) + b(k) \sin(kx + k^3 t) dk$$

☞ 初期値問題： $u(x, 0) = f(x)$

→ フーリエ解析

$$a(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx$$

$$b(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx$$

→ 解けた！

線形バージョンでは：

☞ sin, cos の重ね合わせで解が作れる

← 線形方程式だから

☞ その解は十分広い

← フーリエ解析

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \cos(kx + k^3 t) + b(k) \sin(kx + k^3 t) dk$$

↓

✓ 各モードは k によって速度が異なる (分散)

→ 孤立波は安定に存在し得ない

✓ 線形方程式でなければ上の解法は破綻

→ 非線形方程式は普通厳密に解けない

線形バージョンでは：

☞ sin, cos の重ね合わせで解が作れる

← 線形方程式だから

☞ その解は十分広い

← フーリエ解析

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \cos(kx + k^3 t) + b(k) \sin(kx + k^3 t) dk$$

↓

✓ 各モードは k によって速度が異なる (分散)

→ 孤立波は安定に存在し得ない

✓ 線形方程式でなければ上の解法は破綻

→ 非線形方程式は普通厳密に解けない

KdV 方程式： $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$

孤立波解 (1-ソリトン解)：

$$u = 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t + \delta)$$

$$= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + e^{\eta_1}),$$

$$\eta_1 = p_1 x - p_1^3 t + \delta, \quad p_1 = \kappa/2$$

$u(x, t) = v(x - ct)$ (c : 定数) → ODE → 積分

2-ソリトン解：

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2})$$

$$A_{12} = \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2$$

N-ソリトン解：

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(\text{指数関数の多項式})$$

同様の構造をもった方程式：ソリトン方程式

☞ KP 方程式：

$$\left(-\frac{1}{4}u_t + 6uu_x + u_{xxx}\right)_x + u_{yy} = 0$$

☞ modified KdV 方程式：

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

☞ 非線形シュレディンガー方程式：

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2u = 0$$

☞ 戸田格子方程式：

$$\ddot{u}_n = e^{u_{n-1}-u_n} - e^{u_n-u_{n+1}}$$

…など無限個ある。

✓ 非線形波動：物理的・工学的応用

非線形の「基本モード」としてのソリトン

✓ 解けるメカニズムの解明：数理的研究

- 方程式・解の変換理論
- 対称性・保存則
- 階層構造…

同様の構造をもった方程式：ソリトン方程式

☞ KP 方程式：

$$\left(-\frac{1}{4}u_t + 6uu_x + u_{xxx}\right)_x + u_{yy} = 0$$

☞ modified KdV 方程式：

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

☞ 非線形シュレディンガー方程式：

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2u = 0$$

☞ 戸田格子方程式：

$$\ddot{u}_n = e^{u_{n-1}-u_n} - e^{u_n-u_{n+1}}$$

…など無限個ある。

✓ 非線形波動：物理的・工学的応用

非線形の「基本モード」としてのソリトン

✓ 解けるメカニズムの解明：数理的研究

- 方程式・解の変換理論
- 対称性・保存則
- 階層構造…

解からわかる「解ける奇跡」のからくり：

KP 方程式の解：行列式構造

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau,$$

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial}{\partial x} f_1 & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} f_1 \\ f_2 & \frac{\partial}{\partial x} f_2 & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} f_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_N & \frac{\partial}{\partial x} f_N & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} f_N \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \frac{\partial^3 f_k}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}$$

☞ 解の行列式構造

→ 解空間：無限次元グラスマン多様体

☞ 解の無限小変換

→ Kac-Moody リー環(無限次元)

↓

無限の対称性に支えられた無限次元の空間

からくりの一つが明らかになった後は：

✓ いろいろな分野と交わる

物理学・工学：光ファイバ・交通流など非平衡統計力学・海洋波・プラズマ…，微分（差分）・代数・位相幾何学，表現論，数理物理，…

✓ 世界を広げる

高次元化・離散化・超離散化，新しいソリトン系，ソリトン系以外の可積分系（パンルヴェ系とその拡張など）…

✓ 新たな奇跡を求めて

いわゆる量子可積分系：可解格子模型・共形場理論…

対称性として量子群やその拡張，VOAなど：表現論と強い関係

直接可積分系と関係する九大数理の教員：

☛ 岩崎 克則(教授): パンルヴェ微分方程式の代数幾何学・複素力学系的側面の研究

☛ 中屋敷 厚(准教授): 量子可積分系の研究

☛ 梶原 健司(准教授): (離散)パンルヴェ系・ソリトン系の無手勝流的研究

☛ 津田 照久(助教): (離散)パンルヴェ系の代数的・表現論的立場からの研究

世界を広げる：可積分系の離散化

基本的なアイデア：Logistic 方程式を例に

$$\frac{du}{dt} = au(1 - u), \quad a > 0$$

両辺 u^2 で割って変形：

$$\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} - 1 \right) = a \left(\frac{1}{u} - 1 \right)$$

変数変換 \downarrow $v := \frac{1}{u} - 1$

線形方程式： $\frac{dv}{dt} = -av \rightarrow v = Ce^{-at}$

元に戻す \downarrow $u = \frac{1}{1+v}$

解けた！ $u = \frac{1}{1 + Ce^{-at}}$

世界を広げる：可積分系の離散化

基本的なアイデア：Logistic 方程式を例に 離散化： $u(t) = u(nh) = u_n$

$$\frac{du}{dt} = au(1-u), \quad a > 0$$

両辺 u^2 で割って変形：

$$\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} - 1 \right) = a \left(\frac{1}{u} - 1 \right)$$

変数変換 \downarrow $v := \frac{1}{u} - 1$

線形方程式： $\frac{dv}{dt} = -av \rightarrow v = Ce^{-at}$

元に戻す \downarrow $u = \frac{1}{1+v}$

解けた！ $u = \frac{1}{1 + Ce^{-at}}$

1. 前進差分スキーム：

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = au_n(1 - u_n)$$

2. 中心差分スキーム：

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = au_n(1 - u_n)$$

3. 「可積分」スキーム：

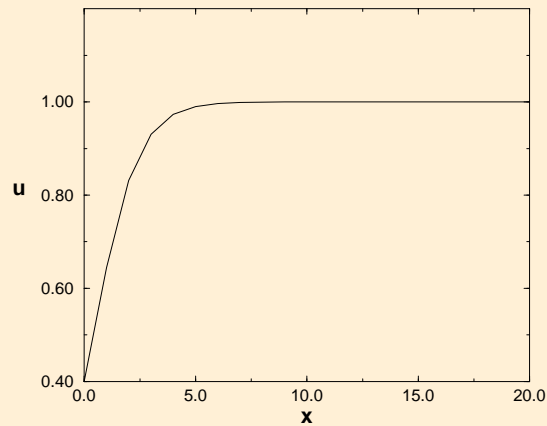
$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = au_n(1 - u_{n+1})$$

- ☛ 1, 2 は元の解の性質を全く保存しない。(カオス)
- ☛ 3 は解の大域的性質をよく保存する。

解の挙動：

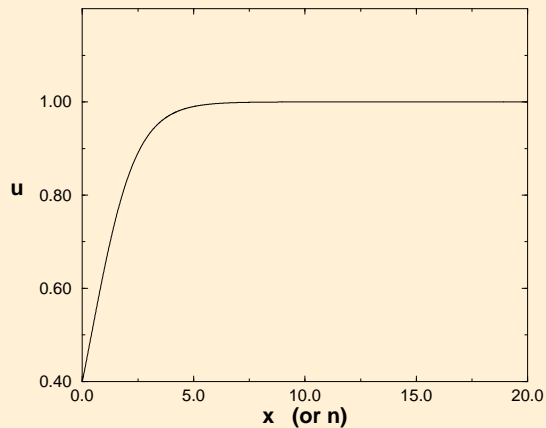
Solution of Logistic Equation

with initial value $u(0)=0.4$



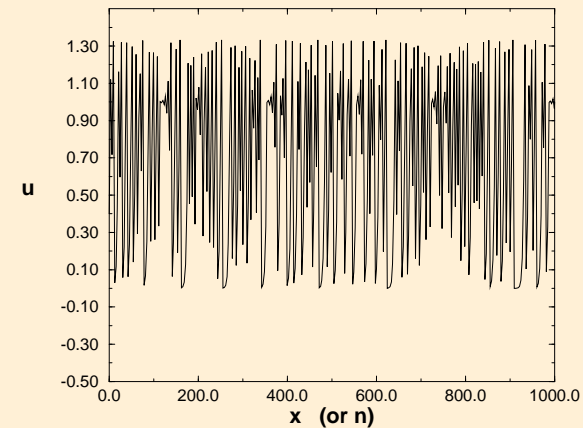
Logistic map

with $a=0.01, u(0)=0.4$



Logistic map

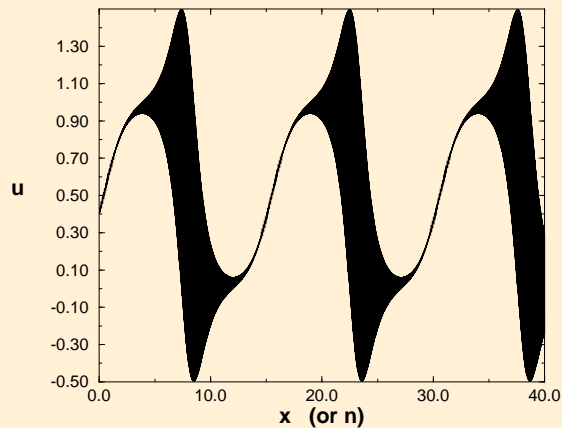
with $a=3, u(0)=0.4$



logistic 方程式

Central Difference Approximation

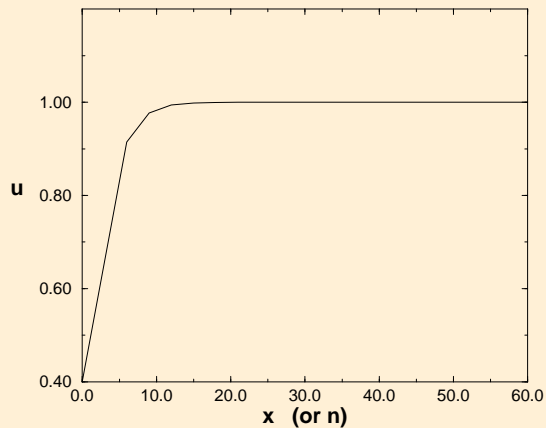
with $a=0.01, u(0)=0.4$



中心差分

"Integrable" Discretization

with $a=3, u(0)=0.4$



可積分

前進差分

logistic 方程式

$$\frac{du}{dt} = au(1 - u)$$

$$\downarrow v := \frac{1}{u} - 1$$

線形方程式

$$\frac{dv}{dt} = -av$$

\downarrow

$$v = Ce^{-at}$$

$$u = \frac{1}{1 + Ce^{-at}}$$

「離散logistic 方程式」

$\stackrel{?}{\implies}$

$$\boxed{\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = au_n(1 - u_{n+1})}$$

$$\uparrow v_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

線形方程式

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{h} = -av_n$$

\downarrow

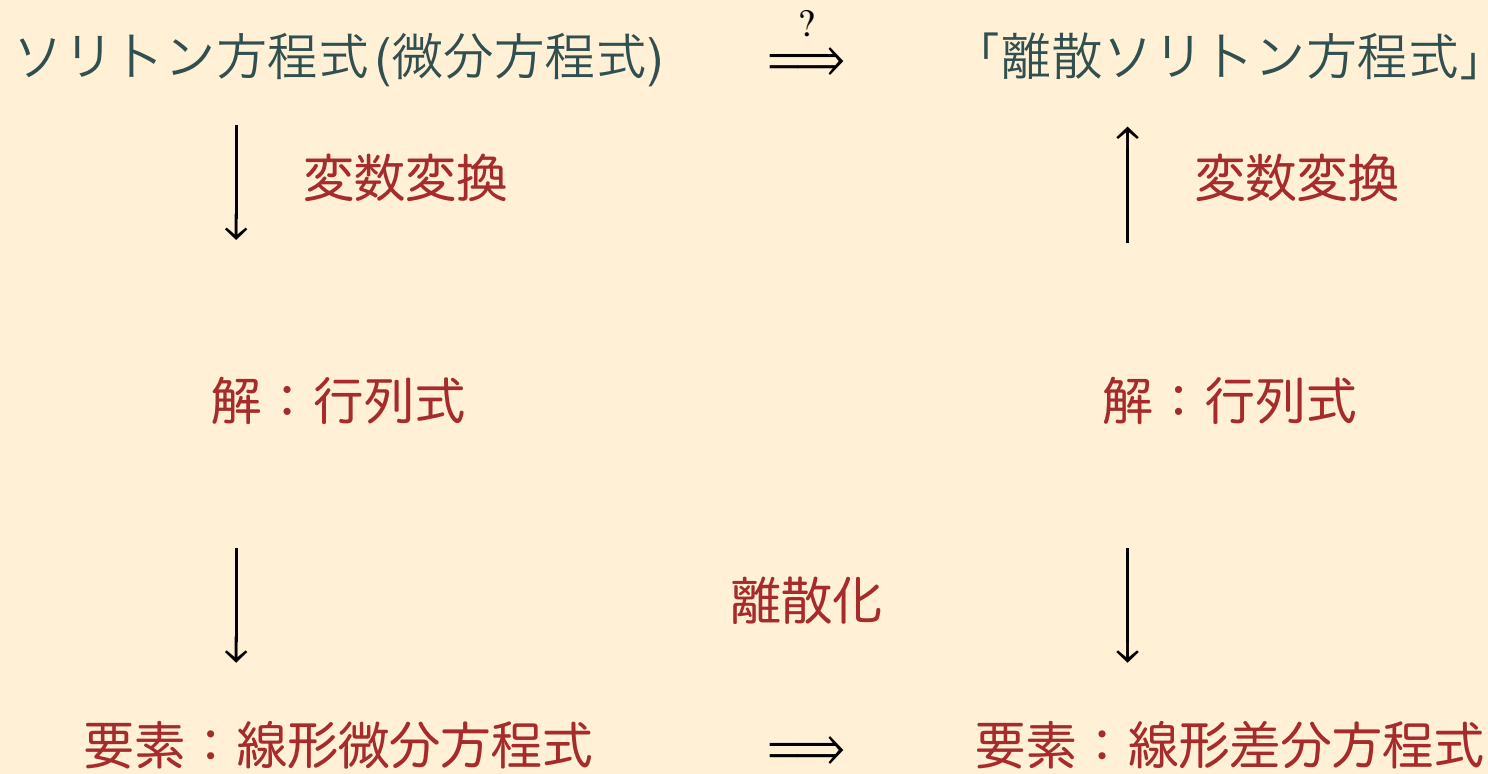
$$v_n = C(1 + ah)^{-n}$$

$$u_n = \frac{1}{1 + C(1 + ah)^{-n}}$$

変数変換

解

ソリトン系の離散化



ソリトン系の離散化: 戸田格子と離散時間戸田格子

戸田格子

方程式:

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n-1}}$$

ソリトン解:

$$r_n = \log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_1(n) & f_1(n+1) & \cdots & f_1(n+N-1) \\ f_2(n) & f_2(n+1) & \cdots & f_2(n+N-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_N(n) & f_N(n+1) & \cdots & f_N(n+N-1) \end{vmatrix}$$

$$f_k(n) = 1 + p_k^{2n} e^{\left(p_k - \frac{1}{p_k}\right)t}$$

離散時間戸田格子

方程式:

$$\frac{R_n(t+\delta) - 2R_n(t) + R_n(t-\delta)}{\delta^2} = F_{n+1}(t) - 2F_n(t) + F_{n-1}(t)$$

$$\text{ただし } F_n(t) = \frac{1}{\delta^2} \log(1 + \delta^2 e^{R_n(t)})$$

ソリトン解:

$$R_n = \log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_1(n) & f_1(n+1) & \cdots & f_1(n+N-1) \\ f_2(n) & f_2(n+1) & \cdots & f_2(n+N-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_N(n) & f_N(n+1) & \cdots & f_N(n+N-1) \end{vmatrix}$$

$$f_k(n) = 1 + \left(p_k^2 \frac{1+\delta/p_k}{1-\delta/p_k}\right)^n \left[\frac{1+\delta^2}{(1-\delta/p_k)(1+\delta/p_k)}\right]^{t/\delta}$$

パウルヴェ系と離散パウルヴェ系: 無手勝流の研究事始め

線形偏微分方程式と特殊函数

2次元ヘルムホルツ方程式:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \lambda u = 0$$

そのままでは手も足も出ない



何とか常微分方程式に落とす

変数分離

$$u(x, y) = R(r) \Phi(\theta) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

ベッセル方程式:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

パウルヴェ系と離散パウルヴェ系: 無手勝流の研究事始め

線形偏微分方程式と特殊函数

2次元ヘルムホルツ方程式:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \lambda u = 0$$

そのままでは手も足も出ない



何とか常微分方程式に落とす

変数分離

$$u(x, y) = R(r) \Phi(\theta) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

ベッセル方程式:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

ソリトン方程式とパウルヴェ方程式

modified KdV 方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

方程式のスケール不変性:

$$u(x, t) \text{ が解} \rightarrow \lambda u(\lambda x, \lambda^3 t) \text{ も解}$$

スケール変換に対して不変な解: 「相似解」

$$u(x, t) = \frac{w(z)}{(3t)^{1/3}}, \quad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}$$

パウルヴェII方程式(P_{II}):

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 2w^3 + zw + \alpha$$

パルヴェ方程式: 非線形世界の特殊関数の方程式

☞ 全部で6種類

$$P_I : w'' = 6w^2 + z$$

$$P_{II} : w'' = 2w^3 + zw + \alpha$$

$$P_{III} : w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + w + \frac{1}{w}$$

☞ ソリトン系の相似解や格子模型の相関関数など「可積分系」の重要な量を記述する.

☞ 「パルヴェ性」: 初期値に依存する特異点が高々極のみ

$$w = (z - z_0)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \rho \in \mathbb{Z}$$

☞ 2階の常微分方程式でパルヴェ性を持つもの:

(1) 求積可能なもの, (2) 楕円関数の微分方程式, (3) パルヴェ方程式

☞ 一般に解は「超越的」. パラメータが特殊な場合に超幾何型の特殊関数で書ける解や, 代数関数解などの特殊解がある.

☞ ある解を別のパラメータの解に写す変換があり, アフィンワイル群をなしている.

その他, さまざまなよい性質がある.

離散パルヴェ方程式: (Grammaticos et al, 1991-)

☞ 連続極限でパルヴェ方程式に帰着：たくさんある

$$\text{dP}_I : w_{n+1} + w_n + w_{n-1} = \frac{an + b}{w_n} + c$$

$$\text{dP}_{II} : w_{n+1} + w_{n-1} = \frac{(an + b)w_n + c}{1 - w_n^2}$$

$$\text{dP}_{III} : w_{n+1}w_{n-1} = \frac{ab(w_n - cq^n)(w_n - dq^2)}{(w_n - a)(w_n - q^n)}$$

☞ 「特異点閉じこめ」：パルヴェ性の離散類似??

- 初期値に位置が依存してあるステップで特異性が現れたとき、その特異性は何ステップか後にキャンセルしてなくなる。
- 特異点を通過しても初期値に関する情報は失われない。

$$x_{n+1} = \frac{8x_n}{1 - x_n^2} - x_{n-1}, \quad x_0 = p, \quad x_1 = 1 + \epsilon$$

$$x_2 = -\frac{4}{\epsilon} - (2 + \alpha) + O(\epsilon), \quad x_3 = -1 + O(\epsilon), \quad x_4 = -p + O(\epsilon)$$

こんなものをパルヴェ性に「似てる」と言われても…

離散パルヴェ系: 解から始める無手勝流

$$P_{II}: w'' = 2w^3 + zw + \alpha$$

↓

$$w' = A(t)w^2 + B(t)w + C(t)$$

で記述される特殊解を探す

↓

$$w' = -w^2 + \frac{t}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

↓

$$w = \frac{f'}{f}$$

$$f'' = -\frac{t}{2}f$$

Airy 函数

離散パルヴェ系: 解から始める無手勝流

$$P_{II}: w'' = 2w^3 + zw + \alpha$$

↓

$$w' = A(t)w^2 + B(t)w + C(t)$$

で記述される特殊解を探す

↓

$$w' = -w^2 + \frac{t}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

↓

$$w = \frac{f'}{f}$$

$$f'' = -\frac{t}{2}f$$

Airy 関数

$$dP_{II}: w_{n+1} + w_{n-1} = \frac{(an + b)w_n + c}{1 - w_n^2}$$

↓

$$w_{n+1} = \frac{A_n w_n + B_n}{C_n w_n + D_n}$$

で記述される特殊解を探す

↓

$$w_{n+1} = \frac{w_n - (pn + q)}{w_n + 1}$$

$$a = 2p, b = -p + 2q + 2, c = -p$$

↓

$$w_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{f_n}$$

$$f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = -(pn + q)f_n$$

「離散Airy関数」 !!

無手勝流その後…

- ☞ よい特殊解を具体的に作ることで得られる情報から離散パンルヴェ系を攻略し、まず数学として研究する価値がある方程式であるという状況証拠を積み重ねた。
- ☞ さまざまな学問的背景を持つ数学者・物理学者が興味をもつようになった。
- ☞ 現在では大きな理論に成長した。
 - 背後に有理楕円曲面の幾何学(代数幾何学)
 - 離散パンルヴェ系はその曲面上の変換が作る離散力学系
 - 数学的にはパンルヴェ微分方程式より離散パンルヴェ系の方が本質的

可積分系への招待

- ☞ 初等的で具体的な数学的事実を積み上げながら高みに登っていける。
- ☞ あまり勉強しなくても研究生活に入れる。
- ☞ その代わり「発見の才」は必要。(あるかどうかはやってみないとわからない)
- ☞ さまざまな分野の交差点。いろいろな学問的背景を持っていてもそれを生かせる。
- ☞ 日本は世界の研究センターの一つ。数学会にも「無限可積分系」セッション
- ☞ 九大数理はアクティブな拠点の一つです。(「九州可積分系セミナー」)

無手勝流その後…

- ☛ よい特殊解を具体的に作ることで得られる情報から離散パウルヴェ系を攻略し、まず数学として研究する価値がある方程式であるという状況証拠を積み重ねた。
- ☛ さまざまな学問的背景を持つ数学者・物理学者が興味をもつようになった。
- ☛ 現在では大きな理論に成長した。
 - 背後に有理楕円曲面の幾何学(代数幾何学)
 - 離散パウルヴェ系はその曲面上の変換が作る離散力学系
 - 数学的にはパウルヴェ微分方程式より離散パウルヴェ系の方が本質的

可積分系への招待

- ☛ 初等的で具体的な数学的事実を積み上げながら高みに登っていける。
- ☛ あまり勉強しなくても研究生活に入れる。
- ☛ その代わり「発見の才」は必要。(あるかどうかはやってみないとわからない)
- ☛ さまざまな分野の交差点。いろいろな学問的背景を持っていてもそれを生かせる。
- ☛ 日本は世界の研究センターの一つ。数学会にも「無限可積分系」セッション
- ☛ 九大数理はアクティブな拠点の一つです。(「九州可積分系セミナー」)

九大数理にいらっしやい!