Cremona 変換と楕円差分 Painlevé 方程式

– 高次元的な枠組みへの試論 –

梶原健司・増田 哲・野海正俊・太田泰広・山田泰彦*

序

この論説の主な目的は, 射影空間内の一般な位置にある点配置の配置空間と, その上への Weyl 群の双有理作用を基礎にして, 楕円差分 Painlevé 方程式を含むような Cremona 変換の系についての高次元的な枠組みを提供することである.

離散 Painlevé 方程式の研究が Grammaticos, Ramani, Papageorgiou, Hietarinata の先駆的な論文 [6] に始まると考えると, それから優に 10 年を超える歳月が経過している. その間に, 特異点閉込め, 双線形方程式, アフィン Weyl 群対称性, 初期値空間 – といった様々な観点から, 数多くの離散 Painlevé 方程式やその拡張が発見され, 研究されてきたことは周知の通りである ([19], [20], [15], [21], ...).

ここではその中で, 有理曲面に由来する離散 Painlevé 方程式のクラスに関する, 坂井の幾何学的枠組み [21] に言及しておきたい. このクラスの方程式は何れも, 射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の適当なブローアップによって得られる曲面の族の上に働く Cremona 変換の群によって定義される. 方程式は対応する有理曲面の型に従って, アフィン・ルート系によって分類され, その対称性もまたアフィン Weyl 群によって記述される. 表題に掲げた「楕円差分 Painlevé 方程式」は, このクラスの離散 Painlevé 方程式の階層の頂上に位置する対象である. これは, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある 9 点の配置でパラメータ付けられた曲面族の上に定義される離散力学系であり, 対応する Cremona 変換群は $E_8^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群となる. 既に我々の論文 [8] で示したように, この楕円差分 Painlevé 方程式は, Ohta-Ramani-Grammaticos [16] によって全く別の観点から E_8 格子上の τ 函数の双線形方程式系として構成された「8 パラメータの離散 Painlevé 方程式」と等価な対象であることが分かっている. [8] ではまた, 楕円差分 Painlevé 方程式が, 「楕円超幾何函数」で表されるような Riccati 型の特殊解をもつことを示した. これは, Frenkel-Turaev [4] (楕円的 6-j シンボル) や Spiridonov-Zhedanov [22] (双直交有理函数系) 等によって研究されてきた楕円超幾何函数に, 非線形特殊函数としての新しい視座をもたらすものであった.

この論説では, 楕円差分 Painlevé 方程式への幾何学的アプローチを高次元へ拡張することを念頭において, $m-1$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある n 点 $p_1,\dots,p_n$ の配

* K.K. (九州大・数理学); T.M., M.N., Y.O. (神戸大・自然科学); Y.Y. (神戸大・理)

置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ を考察する．この配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ に, 樹木 $T_{2,m,n-m}$ に付随する Weyl 群 $W_{m,n}$ が双有理変換群として作用することは, よく知られた古典的な結果である ([3])．これを相対的な設定にして, $W_{m,n}$ 共変な射影 $\mathbb{X}_{m,n+1} \to \mathbb{X}_{m,n}$ ($[p_1,\ldots,p_n,q]$ を $[p_1,\ldots,p_n]$ に移すもの) を考えると, $W_{m,n}$ の $\mathbb{X}_{m,n+1}$ への作用から, 配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ でパラメータ付けられた $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の族の上で, Weyl 群 $W_{m,n}$ を Cremona 変換の群として実現することができる．$(m,n)=(3,9),(4,8),(6,9)$ の 3 つの場合には, $W_{m,n}$ はそれぞれ $E_8^{(1)}$, $E_7^{(1)}$, $E_8^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群である．この 3 つの場合には, $W_{m,n}=W(E_l^{(1)})$ がルート格子 $Q(E_l)$ とその上に働く有限 Weyl 群 $W(E_l)$ の半直積に分解し, その格子部分から, $\mathbb{X}_{m,n}$ をパラメータ空間に持つ $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の族の上の双有理的な離散力学系が得られる．それは「(m,n) 型離散 Painlevé 系」と呼ぶべきものであって, その意味での $(3,9)$ 型の離散 Painlevé 系が, 坂井の表にある $W(E_8^{(1)})$ 対称性をもつ 3 つの離散 Painlevé 方程式 (楕円的, 三角的, 有理的) を含むものとなる．

第 3 節では, この点配置空間の枠組みで, $\mathbb{X}_{m,n}$ への Weyl 群 $W_{m,n}$ の非線形作用を楕円函数を用いて「線形化」する．樹木 $T_{2,m,n-m}$ に付随する Kac-Moody Lie 環の Cartan 部分環を $\mathfrak{h}_{m,n}$ で表せば, $\mathfrak{h}_{m,n}$ には $W_{m,n}$ が標準的に, 線形に作用する．そこで, 楕円函数を用いて, $W_{m,n}$ 共変な有理型写像 $\varphi_{m,n}:\mathfrak{h}_{m,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n}$ を構成することが「線形化」の内容である．$W_{m,n}$ の $\mathbb{X}_{m,n}$ への双有理作用を $\mathbb{X}_{m,n}$ の座標函数を未知函数とする函数方程式系と見なせば, 有理型写像 $\varphi_{m,n}$ は, この方程式系の一つの「標準的な」楕円函数解を与える．幾何学的には, $\varphi_{m,n}$ の像として, $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の n 点配置のうち n 点がすべて同一の楕円曲線上にあるようなもののクラスであって, $W_{m,n}$ の作用で閉じたものを指定したことになる．相対的な設定 $\mathbb{X}_{m,n+1} \to \mathbb{X}_{m,n}$ に移って, パラメータ空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ を $\varphi_{m,n}$ の像に制限すれば, $W_{m,n}$ の $\mathbb{X}_{m,n+1}$ への作用から, 楕円函数を係数に含むような $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の Cremona 変換群としての, $W_{m,n}$ の実現が得られる．この論説では, これを「(m,n) 型楕円 Cremona 系」と呼ぶ．第 4 節では, この楕円 Cremona 系に対する τ 函数の理論を展開し, $W_{m,n}$ の非線形作用がある格子上の τ 函数の広田・三輪型双線形方程式系に変換されることを示す．最後の第 5 節では, 上記の枠組みを $(3,9)$ 型 の楕円差分 Painlevé 系に適用し, 楕円差分 Painlevé 方程式の時間発展を具体的に記述する方法等を論じる．

この論説で詳述した楕円 Cremona 系の τ 函数の枠組みは, 楕円 Painlevé 系の特殊解の解析にも応用することができる．また点配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ で展開したこの論説の議論を, 退化した点配置をも含むように「完備化」することは重要で, 興味深い問題である．このような論点については, 今後の研究の進展を俟って改めて議論することとしたい．

.

目 次

1　点配置空間と Weyl 群作用

1.1　点配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$

m,n を $n>m$ なる自然数として, 複素射影空間 $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある n 点の配置空間を $\mathbb{X}_{m,n}$ で表す. $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ において, n 個の点 $p_1,\ldots,p_n$ のうちのどの m 点も同一超平面上にないとき, n 点の組 $(p_1,\ldots,p_m)$ は一般の位置にあるという. また, n 点の組 $(p_1,\ldots,p_n)$ と $(q_1,\ldots,q_n)$ とが射影変換群 $PGL_m(\mathbb{C})=GL_m(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ の自然な作用で移り合うとき, 両者は同一の配置を定めるものと見なす:

$$\mathbb{X}_{m,n}=PGL_m(\mathbb{C})\backslash\left\{(p_1,\ldots,p_n)\in\left(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})\right)^n\ \middle|\ p_1,\ldots,p_n\ \text{は一般の位置}\right\}. \tag{1.1}$$

以下では, n 点の組 $(p_1,\ldots,p_n)$ の定める点配置 ($PGL_m(\mathbb{C})$ 軌道) を $[p_1,\ldots,p_n]$ で表す:

$$[p_1,\ldots,p_n]=[q_1,\ldots,q_n]\iff\exists g\in PGL_m(\mathbb{C}):\quad g.p_j=q_j\quad(j=1,\ldots,n). \tag{1.2}$$

この $\mathbb{X}_{m,n}$ は超平面配置に付随する超幾何函数が定義される配置空間と同一のものである (例えば [1], [25] を参照).

射影空間の同次座標系を固定すれば, 点配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ は適当な行列空間への群作用に関する軌道空間として表される. 今 $m\times n$ 複素行列 $X=\left(x_{i,j}\right)_{1\le i\le m;\,1\le j\le n}$ で, 全ての m 次小行列式

$$\det X_{j_1,\ldots,j_m}=\det\left(x_{a,j_b}\right)_{a,b=1}^m\qquad(1\le j_1<\cdots<j_m\le n) \tag{1.3}$$

が 0 でないものの全体を $\mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ で表そう. このとき $\mathbb{X}_{m,n}$ は, $\mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ への一般線形群 $GL_m(\mathbb{C})$ の左作用と代数的トーラス $T_n=(\mathbb{C}^*)^n$ の右作用に関する両側軌道空間と同一視できる:

$$\mathbb{X}_{m,n}=GL_m(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C})/T_n,\quad T_n=(\mathbb{C}^*)^n. \tag{1.4}$$

$\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の同次座標系を固定し, ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ に対応する射影空間の点を $p=(x_1:\ldots:x_m)$ で表す. このとき $\mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ に属する行列

$$X=\begin{pmatrix}x_{1,1}&x_{1,2}&\ldots&x_{1,m}&x_{1,m+1}&\ldots&x_{1,n}\\x_{2,1}&x_{2,2}&\ldots&x_{2,m}&x_{2,m+1}&\ldots&x_{2,n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{m,1}&x_{m,2}&\ldots&x_{m,m}&x_{m,m+1}&\ldots&x_{m,n}\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

の n 個の列 $(x_{1j},\ldots,x_{m,j})$ $(j=1,\ldots,n)$ に n 個の点 $p_j=(x_{1,j}:\ldots:x_{m,j})\in\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ を対応させて, X の軌道 $GL_m(\mathbb{C})\,X\,T_n$ と点配置 $[p_1,\ldots,p_n]$ を同一視する訳である. n 次元の線形空間内の m 次元部分線形空間全体のなす Grassmann 多様体を $\mathrm{Grass}_{m,n}(\mathbb{C})$ で表せば, 軌道空間 $GL_m(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ は, Grassmann 多様体

$$\mathrm{Grass}_{m,n}(\mathbb{C})=GL_m(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Mat}'_{m,n}(\mathbb{C}) \tag{1.6}$$

の Zariski 開集合 (有限個の超曲面を取り除いて得られる開集合) と見なせる (階数 m の $m\times n$ 行列の全体を $\mathrm{Mat}'_{m,n}(\mathbb{C})$ と記した). 従って点配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ は, Grassmann 多様体の一つ

の Zariski 開集合

$$\mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C}) = GL_m(\mathbb{C})\backslash \mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C}) \tag{1.7}$$

の, 代数的トーラス T_n の右作用に関する商空間となっていることに注意しておこう.

$X \in \mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ を任意にとると, その軌道 $GL_m(\mathbb{C})\,X\,T_n$ 内に次の形の行列 U が唯一つ存在することが容易に示される:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & u_{1,m+2} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & u_{m-1,m+2} & \dots & u_{m-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

X から U を得るには次のようにすればよい. まず X の最初の m 列で作る正方行列の逆行列を左から乗じて

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & y_{m,m+1} & \dots & y_{m,n} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

を作る. このとき y_{ij} は

$$\begin{aligned} & y_{i,j} = (-1)^{m-i}\,\frac{\xi_{\hat{\imath},j}}{\xi_\phi} \qquad (i=1,\dots,m;\ j=m+1,\dots,n) \\ & \xi_\phi = \det X_{1,\dots,m}, \quad \xi_{\hat{\imath},j} = \det X_{1,\dots,\hat{\imath},\dots,m,j} \end{aligned} \tag{1.10}$$

である. この Y に左から m 次の対角行列 $\mathrm{diag}\big(y_{1,m+1},\dots,y_{m,m+1}\big)^{-1}$ を乗じて第 $m+1$ の成分を全て 1 とし, 更に右から n 次の対角行列

$$\mathrm{diag}\big(y_{1,m+1},\dots,y_{m,m+1},1,\frac{y_{m,m+1}}{y_{m,m+2}},\dots,\frac{y_{m,m+1}}{y_{m,n}}\big) \tag{1.11}$$

を乗じれば U が得られる. U の成分は

$$u_{i,j} = \frac{y_{m,m+1}\,y_{i,j}}{y_{i,m+1}\,y_{m,j}} = \frac{\xi_{\hat{m},m+1}\,\xi_{\hat{\imath},j}}{\xi_{\hat{\imath},m+1}\,\xi_{\hat{m},j}} \quad (i=1,\dots,m-1;\ j=m+2,\dots,n) \tag{1.12}$$

で与えられる.

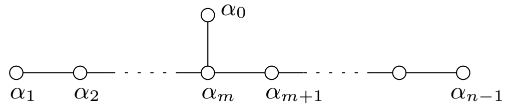
この形の行列 U で $\mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ に属するものの全体を $\mathcal{U}$ と書けば, $\mathcal{U}$ は全ての $(GL_m(\mathbb{C}),T_n)$ 軌道の完全代表系を与える. $\mathcal{U}$ はアフィン空間 $\mathbb{C}^{d_{m,n}}$ (次元は $d_{m,n}=(m-1)(n-m-1)$) の Zariski 開集合なので, 同型 $\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_{m,n}$ によって $\mathbb{X}_{m,n}$ に アフィン代数多様体の構造が誘導される. 特に, $\mathbb{X}_{m,n}$ の有理函数体 $\mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n})$ は, $\mathcal{U}$ の座標系 $u=(u_{ij})_{1\le i\le m-1;m+2\le j\le n}$ に関する $d_{m,n}$ 変数の有理函数体 $\mathbb{C}(u)$ と同一視できる.

1.2 Weyl 群の双有理作用

$\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある n 点の配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ には, 樹木 $T_{2,m,n-m}$ を Dynkin 図形にもつ Weyl 群が双有理変換群として作用することが知られている (これは古典的に良く

知られた事実 [2], [3]. この事実を確認するだけならば, 後述の変換 (1.28) について Weyl 群の基本関係式が成立することを検証すれば十分である).

$T_{2,m,n-m}:$



(1.13)

($T_{p,q,r}$ は樹木状の Dynkin 図形で, 中心の $\circ$ から長さがそれぞれ $p-1$, $q-1$, $r-1$ の 3 本の枝が出るものを表す. 上図の $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ は単純ルート. これについては後述する.) 対応する Weyl 群 $W_{m,n} = W(T_{2,m,n-m})$ は, Dynkin 図形の $\circ$ に対応する n 個の生成元 $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ (単純鏡映と呼ぶ) と次の基本関係で定義される群である.

$$W_{m,n} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle : \qquad \begin{array}{cc} s_i^2 = 1 & \alpha_i \quad \alpha_j \\ s_i s_j = s_j s_i & \circ \quad\ \circ \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \end{array} \tag{1.14}$$

この Weyl 群が, n 点 $p_1, \ldots, p_n$ の中の m 点を中心とする「標準 Cremona 変換」によって $\mathbb{X}_{m,n}$ の双有理変換群として実現される.

まず標準 Cremona 変換とは何かを思い出す. m 個の点 $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ が同一超平面上にないとする. このとき, $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の同次座標系 $(x_1, \ldots, x_m)$ を, $p_1, \ldots, p_m$ が m 個の座標原点となるように選ぶ:

$$p_1 = (1:0:\ldots:0), \quad p_2 = (0:1:0:\ldots:0), \quad \ldots \quad p_m = (0:\ldots:0:1). \tag{1.15}$$

その上で, $x_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ なる $p = (x_1 : \ldots : x_n)$ に対して, m 個の同次座標を全て逆数に置き換えて得られる点を $\widetilde{p}$ とする:

$$\widetilde{p} = \left(\frac{1}{x_1} : \ldots : \frac{1}{x_m} \right). \tag{1.16}$$

こうして得られる $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の双有理変換 $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$: $p \mapsto \widetilde{p}$ が「$p_1, \ldots, p_m$ を中心とする標準 Cremona 変換」である. (但し, 同次座標系 $(x_1, \ldots, x_m)$ の選び方には各座標成分を定数倍する任意性があり, その範囲で同次座標系を取替えると別の双有理変換 $p \mapsto \widetilde{p}$ が生じる. その意味では, $T_m = (\mathbb{C}^*)^m$ の作用の分の不定性を除いてしか決まらない.)

以下の議論のために, $W_{m,n}$ の $\mathbb{X}_{m,n}$ への双有理作用の明示的な記述を与える. (以下, Weyl 群を空間に作用させるときは右作用で, 函数体に作用させるときには左作用で考える.) まず, 部分群 $\langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle \subset W_{m,n}$ は n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ に同型であって, この部分は n 個の点 $p_1, \ldots, p_n$ の置換として作用する: 各 $[p_1, \ldots, p_n] \in \mathbb{X}_{m,n}$ に対して

$$[p_1, \ldots, p_n].s_k = [p_1, \ldots, p_{k+1}, p_k, \ldots, p_n] \qquad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{1.17}$$

この流儀で, 一般の $\sigma \in \mathfrak{S}_n = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ に対して

$$[p_1, \ldots, p_n].\sigma = [p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(n)}] \tag{1.18}$$

となる. s_0 は, $[p_1,\dots,p_n]$ のうちの最初の m 点 $p_1,\dots,p_m$ を中心とする標準 Cremona 変換 $p\mapsto\widetilde{p}$ を用いて次のように定義する:

$$[p_1,\dots,p_n].s_0=[p_1,\dots,p_m,\widetilde{p}_{m+1},\dots,\widetilde{p}_n]. \tag{1.19}$$

右辺は, 点配置の代表の取り方にも, 標準 Cremona 変換を定義する際の同次座標系の取り方にもよらずに, $\mathbb{X}_{m,n}$ の点として一意に決まる. 更に, こうして定義した双有理変換 $.s_0:\mathbb{X}_{m,n}\dashrightarrow\mathbb{X}_{m,n}$ について, 双有理変換としての関係式

$$s_0s_ms_0=s_ms_0s_m,\qquad s_0s_k=s_ks_0\quad(1\le k\le n-1;k\ne m) \tag{1.20}$$

が成立することが確認できる. 今, 添字集合を

$$\{1,2,\dots,n\}=\{j_1,\dots,j_m\}\cup\{k_1,\dots,k_{n-m}\} \tag{1.21}$$

と分割し, 置換

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&\dots&m&m+1&\dots&n\\ j_1&\dots&j_m&k_1&\dots&k_{n-m}\end{pmatrix} \tag{1.22}$$

を用いて

$$\mathrm{cr}_{j_1,\dots,j_m}=\sigma\,s_0\,\sigma^{-1} \tag{1.23}$$

と定義しよう (この元は, 部分集合 $\{j_1,\dots,j_m\}$ だけに依存して決まる). このとき

$$[p_1,\dots,p_n].\mathrm{cr}_{j_1,\dots,j_m}=[q_1,\dots,q_n]. \tag{1.24}$$

ここで右辺は, $q_{j_\nu}=p_{j_\nu}$ $(\nu=1,\dots,m)$ としそれ以外の q_j は p_j を $p_{j_1},\dots,p_{j_m}$ を中心とする標準 Cremona 変換で移した点にとった点配置 (の同値類) である. この意味で, $\mathrm{cr}_{j_1,\dots,j_m}$ は $p_{j_1},\dots,p_{j_m}$ を中心とする標準 Cremona 変換を表す.

これで $W_{m,n}$ の $\mathbb{X}_{m,n}$ への双有理的右作用が得られた訳だが, これから誘導される, $W_{m,n}$ の有理函数体 $\mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n})$ への左作用を考えよう. $\mathbb{X}_{m,n}$ 上の有理函数 φ に対して $w\in W_{m,n}$ の作用 $w(\varphi)$ を

$$w(\varphi)(\boldsymbol{p})=\varphi(\boldsymbol{p}.w)\qquad(\boldsymbol{p}=[p_1,\dots,p_n]\text{ は }\mathbb{X}_{m,n}\text{ の一般の点}) \tag{1.25}$$

で定義すると $W_{m,n}\to\mathrm{Aut}(\mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n}))$ なる群準同型が得られる. そこで $\mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n})=\mathbb{C}(u)$ と同一視して, 各座標函数 u_{ij} への作用を見ると

$$w(u_{i,j})=S^w_{i,j}(u)\in\mathbb{C}(u)\qquad(w\in W_{m,n}) \tag{1.26}$$

なる u 変数の有理函数の族 S^w_{ij} が決まる. $S^w(u)=\big(S^w_{i,j}(u)\big)_{i,j}$ と書けば, これらは

$$S^1_{i,j}(u)=u_{ij},\qquad S^{ww'}_{i,j}(u)=S^{w'}_{i,j}(S^w(u)) \tag{1.27}$$

という意味で $W_{m,n}$ の乗法と整合的である. 以下に, $W_{m,n}=\langle s_0,s_1,\dots,s_{n-1}\rangle$ の生成元 s_k の変数 $u_{i,j}$ $(i=1,\dots,m-1;\ j=m+2,\dots,n)$ への作用を書き下す. s_0 は標準 Cremona 変換

に由来するので, 変数をその逆数に置き換える操作として働く. 対称群 $\mathfrak{S}_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle \subset W_{m,n}$ の側の s_k では, $k=m$ の周辺でやや非自明な 1 次分数変換が生じるが, それ以外の部分は添字の隣接互換として働く. (以下 s_k $(k=1,\dots,n-1)$ を添字集合 $\{1,\dots,n\}$ に作用させるときには隣接互換 $(k,k+1)$ と見なす.)

$$
\begin{aligned}
&k=0: && s_0(u_{ij}) = \frac{1}{u_{ij}} \\
&k=1,\dots,m-2: && s_k(u_{ij}) = u_{s_k(i),j} \\
&k=m-1: && s_{m-1}(u_{ij}) = \begin{cases} \dfrac{u_{ij}}{u_{m-1,j}} & (i=1,\dots,m-2) \\ \dfrac{1}{u_{m-1,j}} & (i=m-1) \end{cases} \\
&k=m: && s_m(u_{ij}) = 1-u_{ij} \\
&k=m+1: && s_{m+1}(u_{ij}) = \begin{cases} \dfrac{1}{u_{i,m+2}} & (j=m+2) \\ \dfrac{u_{ij}}{u_{i,m+2}} & (j=m+3,\dots,n) \end{cases} \\
&k=m+2,\dots,n-1: && s_k(u_{ij}) = u_{i,s_k(j)}
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

定理 1.1 $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある n 点の配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ において, 有理函数体 $\mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n}) = \mathbb{C}(u)$ の自己同型 $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ を上記のように定義すると, これらは樹木 $T_{2,m,n-n}$ に付随する *Weyl* 群 $W_{m,n}$ の単純鏡映の基本関係を満たす.

なお, Weyl 群 $W_{m,n} = W(T_{2,m,n-m})$ は $4-(m-2)(n-m-2)$ の符号 $+,0,-$ に応じて, それぞれ有限型, アフィン型, 不定符号型となる. 以下に対応するルート系を示す. ($*$ 印は不定符号型. この表は $(m, n-m)$ に関して対称である.)

$m \setminus n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
2		A_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
3			A_4	D_5	E_6	E_7	E_8	$E_8^{(1)}$	$*$	$*$
4				A_5	D_6	E_7	$E_7^{(1)}$	$*$	$*$	$*$
5					A_6	D_7	E_8	$*$	$*$	$*$
6						A_7	D_8	$E_8^{(1)}$	$*$	$*$
7							A_8	D_9	$*$	$*$

(1.29)

この中でアフィン型となるのは次の 3 つの場合である.

$$W_{3,9} = W(E_8^{(1)}), \quad W_{4,8} = W(E_7^{(1)}), \quad W_{6,9} = W(E_8^{(1)}). \tag{1.30}$$

$W_{4,8}$ は自己双対的で, $W_{3,9}$ と $W_{6,9}$ は互いに他の双対と思える.

$m=1$ または $n=m+1$ の場合には $\mathbb{X}_{m,n}$ は一点集合．また, $m=2$ または $n=m+2$ の場合には, 群準同型 $W_{m,n}\to \mathrm{Aut}(\mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n}))$ は単射ではないことも注意しておこう．

註釈 1.2 Grassmann 多様体の開集合 $\mathrm{Grass}^*_{m,m}(\mathbb{C}) = GL_m(\mathbb{C})\backslash \mathrm{Mat}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ には n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n=\langle s_1,\ldots,s_{n-1}\rangle$ が自然に右側から作用する．(1.9) の行列 Y の成分 $y_{i,j}$ $(1\le i\le m; m+1\le j\le n)$ はこの空間の座標系である．座標函数への $\mathfrak{S}_n$ の作用は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&k=1,\ldots,m-1: && s_k(y_{i,j}) = y_{s_k(i),j}\\
&k=m: && \\
&\quad j=m+1: && s_m(y_{i,m+1}) = \begin{cases} -\dfrac{y_{i,m+1}}{y_{m,m+1}} & (i=1,\ldots,m-1)\\ \dfrac{1}{y_{m,m+1}} & (i=m)\end{cases}\\
&\quad j=m+2,\ldots,n: && s_m(y_{i,j}) = \begin{cases} y_{i,j}-\dfrac{y_{i,m+1}}{y_{m,m+1}}y_{m,j} & (i=1,\ldots,m-1)\\ \dfrac{y_{m,j}}{y_{m,m+1}} & (i=m)\end{cases}\\
&k=m+1,\ldots,n-1: && s_k(y_{i,j}) = y_{i,s_k(j)}
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

本文で述べた $W_{m,n}=\langle s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}\rangle$ の u 変数への作用のうち $\mathfrak{S}_n=\langle s_1,\ldots,s_n\rangle$ の部分は, y 変数への作用を非同次化したものに他ならない．$W_{m,n}$ の $\mathbb{X}_{m,n}$ への双有理作用は, $\mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ への作用に持上がるか？ つまり, 残っている標準 Cremona 変換 s_0 の作用を非同次座標 u_{ij} から同次座標 $y_{i,j}$ にどのように持ち上げればよいか — は微妙な問題である．□

2 Cremona 変換の追跡

2.1 問題の設定

前節で述べたように, $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある n 点配置に対して, その中の m 点を中心とする標準 Cremona 変換と, 点の入替え操作で生成される群を考えると, 点配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ (アフィン代数多様体で, 次元は $(m-1)(n-m-1)$) 上で, Weyl 群 $W_{m,n}$ の双有理変換群としての表現 (非線形表現) が得られる．そこで, このような標準 Cremona 変換の合成として得られるような双有理変換 (一般の Cremona 変換) によって, 射影空間の点がどのように移されるかを合理的に記述したい．(但し, 参照する n 点配置も標準 Cremona 変換を施す毎に変更を受けるものとする.)

この問題は, 配置空間の言葉で次のように定式化される．今, $n+1$ 点の配置空間から n 点の配置空間への射影

$$\pi : \mathbb{X}_{m,n+1}\to\mathbb{X}_{m,n}, \qquad [p_1,\ldots,p_n,q]\mapsto[p_1,\ldots,p_n] \tag{2.1}$$

を考える．ここで p_{n+1} を特別視して $p_{n+1}=q$ と記した．上側の配置空間 $\mathbb{X}_{m,n+1}$ への Weyl 群 $W_{m,n+1}=\langle s_0,s_1,\ldots,s_n\rangle$ の双有理的な作用を部分群 $W_{m,n}=\langle s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}\rangle$ に制限して考えれば, 上記の射影 π は $W_{m,n}$ 共変な写像である．下側の配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ は参照する n

点配置のパラメータ空間であって, そこへの $W_{m,n}$ の双有理作用は, Cremona 変換に伴って n 点配置が変更される様子を記述する. 上の空間のファイバー方向の q が $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の一般の点を表すので, 問題は, 与えられた Cremona 変換 $w \in W_{m,n}$ に対して

$$[p_1, \ldots, p_n, q].w = [\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n, \widetilde{q}] \tag{2.2}$$

と書くとき, 変換 $q \mapsto \widetilde{q}$ を合理的に記述せよ — ということである. (このような定式化は, $(m, n) = (3, 9)$ の場合に [11] で用いられたものである.)

考え方を明瞭にするために, $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の同次座標系を一つ固定して, $\mathbb{X}_{m,n+1}$ の座標を次のようにとる:

$$\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & u_{1,m+2} & \ldots & u_{1,n} & z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 & u_{m-1,m+2} & \ldots & u_{m-1,n} & z_{m-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

ここで $u_{i,n+1} = z_i$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ と記した. n 点配置 $[p_1, \ldots, p_n] \in \mathbb{X}_{m,n}$ と $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の一般の点 q を

$$\begin{aligned} &p_1 = (1 : 0 : \ldots : 0), \ \ldots, \ p_m = (0 : \ldots : 0 : 1), \ p_{m+1} = (1 : \ldots : 1 : 1), \\ &p_j = (u_{1,j} : \ldots : u_{m-1,j} : 1) \qquad (j = m+2, \ldots, n) \\ &q = (z_1 : \ldots : z_{n-1} : 1) \end{aligned} \tag{2.4}$$

とパラメータ付ける訳である. 成分の $u_{i,j}$, z_i を座標函数と見なして, 与えられた $w \in W_{m,n}$ の座標函数への作用を用いて

$$\begin{aligned} &\widetilde{p}_1 = p_j && (j = 1, \ldots, m+1), \\ &\widetilde{p}_j = (w(u_{1,j}) : \ldots : w(u_{m-1,j}) : 1) && (j = m+2, \ldots, n), \\ &\widetilde{q} = (w(z_1) : \ldots : w(z_{m-1}) : 1) \end{aligned} \tag{2.5}$$

とおくと, 点配置としての等式

$$[p_1, \ldots, p_n, q].w = [\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n, \widetilde{q}] \tag{2.6}$$

が成立する. 今, 座標函数への w の作用から決まる有理函数を

$$\begin{aligned} w(u_{i,j}) &= S^w_{i,j}(u) && (i = 1, \ldots, m-1; j = m+2, \ldots, n) \\ w(z_i) &= R^w_i(u; z) && (i = 1, \ldots, m-1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

と記そう. このとき, $S^w_{i,j}(u)$ は Cremona 変換 w に伴って n 点配置が変更を受ける様子を記述し, $R^w_i(u; z)$ が, 点配置をパラメータとする Cremona 変換そのものを記述する.

要するに, 例えば (1.8) の配置に Weyl 群の作用 (1.28) を繰り返したときに何が起こるかが問題にしたいのだが, この際, 列を 1 つ追加しておけば一般の点も一緒に追跡できて都合がよい訳である. 当面の目標は定理 2.2 である.

2.2 $p_1, \ldots, p_n$ における零点の位数

そこで, $R_i^w(u;z)$ としてどのような有理函数が現れるかを観察しよう. 例えば $m=3$ のとき, 標準形は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & a_1 & b_1 & \ldots & z_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 & b_2 & \ldots & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

ととれる. ここで, $(a_1,a_2),(b_1,b_2),\ldots$ は $p_5,p_6,\ldots$ の非同次座標, (z_1,z_2) は一般の点 q の非同次座標である. $w=\mathrm{cr}_{126}\,\mathrm{cr}_{346}$ を例にとって計算すると

$$\begin{aligned} w(z_1) &= \frac{z_1((1-b_2)z_1-(1-b_1)z_2+(b_2-b_1))}{(z_1-b_1)(z_1-z_2)} \\ w(z_2) &= \frac{z_2((1-b_2)z_1-(1-b_1)z_2+(b_2-b_1))}{(z_2-b_2)(z_1-z_2)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

これを, $z_1=x_1/x_3$, $z_2=x_2/x_3$ として同次化すると

$$\begin{aligned} &(w(z_1):w(z_2):1) \\ &= \left(\frac{x_1}{x_1-b_1x_3} : \frac{x_2}{x_2-b_2x_3} : \frac{x_1-x_2}{(1-b_2)x_1-(1-b_1)x_2+(b_2-b_1)x_3}\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで, 各因子の $p_1,p_2,\ldots$ における零点の位数を観察する. 一般に 0 でない d 次同次多項式 $f(x_1,x_2,\ldots)$ を点 $p=(c_1:c_2:\ldots)$ の周りで $(t_1,t_2,\ldots)$ の多項式として

$$\begin{gathered} f(c_1+t_1,c_2+t_2,\ldots)=\sum_{k=0}^{d} f_k(t_1,t_2,\ldots), \\ (f_k \text{ は } (t_1,t_2,\ldots) \text{ の } k \text{ 次同次多項式}) \end{gathered} \tag{2.11}$$

の形に展開したとき, $f_k\neq 0$ なる最小の k を f の p に於ける位数 $\mathrm{ord}_p f$ と定義する. (0 は $\mathrm{ord}_p 0=+\infty$ と約束.) このとき, (2.10) の例に現れる因子の位数は次のようになっている.

f	deg	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
x_1	1	0	1	1	0	0	0
x_2	1	1	0	1	0	0	0
x_1-x_2	1	0	0	1	1	0	0
$x_1-b_1x_3$	1	0	1	0	0	0	1
$x_2-b_2x_3$	1	1	0	0	0	0	1
$(1-b_2)x_1-\cdots$	1	0	0	0	1	0	1

(2.12)

3 変数 1 次同次式は, それを 0 にする相異なる 2 点の座標 (この表で読取れる) の情報があれば, 定数倍を除いて一意に確定する. 実際, 相異なる 2 点 $(a_1:a_2:a_3),(b_1:b_2:b_3)$ で 0 となる 1 次式は

$$f(x_1,x_2,x_3)=\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

の定数倍である.

もう一つ例を掲げる. $w = \mathrm{cr}_{123}\,\mathrm{cr}_{456}$ のときは, 2 次同次多項式 F_1, F_2, F_3 を用いて

$$(w(z_1) : w(z_2) : 1) = \left(\frac{F_1}{x_1} : \frac{F_2}{x_2} : \frac{F_3}{x_3}\right) \tag{2.14}$$

と表すことができ, F_1, F_2, F_3 の零点の位数のパターンは次のようになる.

$$\begin{array}{c||c|cccccc} f & \deg & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ \hline\hline F_1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ F_2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ F_3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \tag{2.15}$$

この 3 変数 2 次同次式の場合も, 一般的な状況では 5 点 $(a_{1j} : a_{2j} : a_{3j})$ $(j = 1,2,3,4,5)$ で 0 の値をとる 2 次式は

$$f(x_1, x_2, x_3) = \det \begin{pmatrix} a_{11}^2 & \dots & a_{15}^2 & x_1^2 \\ a_{11}a_{21} & \dots & a_{15}a_{25} & x_1x_2 \\ a_{21}^2 & \dots & a_{25}^2 & x_2^2 \\ a_{11}a_{31} & \dots & a_{15}a_{35} & x_1x_3 \\ a_{21}a_{31} & \dots & a_{25}a_{35} & x_2x_3 \\ a_{31}^2 & \dots & a_{35}^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

の定数倍である.

一般の $\mathbb{X}_{m,n+1}$ への $W_{m,n}$ の双有理作用についても, 同種の現象が起きる. つまり

> 任意の $w \in W_{m,n}$ に対して, 同次多項式 F_i, G_i $(i = 1, \dots, m)$ をうまくとると
>
> $$(w(z_1) : \dots : w(z_{m-1}) : 1) = \left(\frac{F_1(x)}{G_1(x)} : \dots : \frac{F_m(x)}{G_m(x)}\right) \tag{2.17}$$
>
> と表すことができ, しかも, F_i, G_i の次数と点 $p_1, \dots, p_n$ に於ける零点の位数のパターンは w から決定することができる.

このことは, 零点の位数のパターンを記述する方法を導入した後で定理の形に定式化する.

2.3 同次多項式の標準 Cremona 変換

n 点配置の空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ の函数体を $\mathbb{K} = \mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n})$ とおいて, 適宜, 有理函数体 $\mathbb{C}(u)$, $u = (u_{i,j})_{1\le i\le m-1; m+2\le j\le n}$ と同一視する. そこで, $\mathbb{K}$ を係数体とする m 変数 $x = (x_1, \dots, x_m)$ 多項式環を考える.

$$\mathbb{K}[x] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathbb{K}[x]_d \tag{2.18}$$

ここで, $\mathbb{K}[x]_d$ と書いたのは d 次同次多項式の全体で, その次元は

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_d = \binom{d+m-1}{m-1} = \frac{(d+1)\cdots(d+m-1)}{(m-1)!} \tag{2.19}$$

である. $\mathbb{K}$ 上の $m-1$ 次元の射影空間 $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$ の n 点 $p_1,\ldots,p_n$ を例によって

$$\begin{aligned} &p_1=(1:0:\ldots:0), \quad \ldots, \quad p_m(0:\ldots:0:1), \quad p_{m+1}(1:\ldots:1:1) \\ &p_j=(u_{1,j}:\ldots:u_{m-1,j}:1) \qquad (j=m+2,\ldots,n) \end{aligned} \tag{2.20}$$

と定める. 以下では, 同次多項式の次数とこの n 点での零点の位数のデータを, 整数を成分とする $n+1$ ベクトル

$$\Lambda=(d;\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^n \tag{2.21}$$

で表現する. この Λ に対して $\mathbb{K}[x]_d$ の $\mathbb{K}$ 部分線形空間 (線形系とも呼ぶ) $L(\Lambda)$ を

$$L(\Lambda)=\left\{\, f(x)\in\mathbb{K}[x]_d \mid \mathrm{ord}_{p_j}f(x)\geq\nu_j \quad (j=1,\ldots,n)\,\right\}\subset\mathbb{K}[x]_d \tag{2.22}$$

で定義する.

m 変数 d 次の一般の多項式 $f(x)=f(x_1,\ldots,x_m)$ を

$$f(x)=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=d}c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}\,x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}, \qquad (c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}\in\mathbb{K}) \tag{2.23}$$

と表示しよう $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{Z}_{\geq0})$. このとき, $i=1,\ldots,m$ に対しては

$$\mathrm{ord}_{p_i}f(x)\geq\nu_i \quad\Longleftrightarrow\quad c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}=0 \quad (\alpha_i>d-\nu_i). \tag{2.24}$$

つまり, $p_1,\ldots,p_m$ に関する零点の位数の条件が満たされることと, $f(x)$ が集合

$$\left\{\,\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{Z}^m \mid\ 0\leq\alpha_i\leq d-\nu_i \quad (i=1,\ldots,m)\,\right\} \tag{2.25}$$

の元に対応する単項式の和で表されることは同値である.

$f=f(x)\in L(\Lambda)$ と仮定して, 最初の m 点 $p_1,\ldots,p_m$ に関する f の標準 Cremona 変換 $\widetilde{f}$ を定義したい. そこで, $f(x^{-1})$ に単項式を乗じて同次多項式

$$g(x)=x_1^{d-\nu_1}\cdots x_m^{d-\nu_m}f(x^{-1})=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=d}c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}\,x_1^{d-\nu_1-\alpha_1}\cdots x_m^{d-\nu_m-\alpha_m} \tag{2.26}$$

を作る. 条件

$$\deg f=d, \qquad \mathrm{ord}_{p_i}f\geq\nu_i \quad (i=1,\ldots,m) \tag{2.27}$$

の下では

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=d, \qquad 0\leq\alpha_i\leq d-\nu_i \quad (i=1,\ldots,m). \tag{2.28}$$

従って $g=g(x)$ の次数は

$$\widetilde{d}=(m-1)d-\nu_1-\ldots-\nu_m \tag{2.29}$$

であり, $\beta_i=d-\nu_i-\alpha_i$ は $0\leq\beta_i\leq d-\nu_i$ を満たす. そこで

$$\widetilde{d}-\widetilde{\nu}_i=d-\nu_i, \quad \text{即ち} \quad \widetilde{\nu}_i=(m-2)d-\nu_1-\cdots-\widehat{\nu}_i-\cdots-\nu_m \tag{2.30}$$

とおけば

$$\beta_1+\cdots+\beta_m=\widetilde{d}, \qquad 0\leq\beta_i\leq\widetilde{d}-\widetilde{\nu}_i \quad (i=1,\ldots,m), \tag{2.31}$$

が成立する．つまり

$$\deg g = \widetilde{d}, \qquad \mathrm{ord}_{p_i} g \geq \widetilde{\nu}_i \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.32}$$

である．

以上の注意の下に,

$$f \in L(\Lambda), \qquad L = (d; \nu_1, \ldots, \nu_n) \tag{2.33}$$

に対して, 多項式 $\widetilde{f}$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x) &= x_1^{d-\nu_1} \cdots x_m^{d-\nu_m}\, {}^{s_0}f(x^{-1}) \\ &= \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=d} s_0(c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m})\, x_1^{d-\nu_1-\alpha_1} \cdots x_m^{d-\nu_m-\alpha_m} \end{aligned} \tag{2.34}$$

と定義する．ここで, ${}^{s_0}f$ は f の係数に s_0 を作用させたものを表す．(s_0 は $\mathbb{K}$ の自己同型.) $x_1, \ldots, x_m$ は $p_{m+1}, \ldots, p_n$ には零点をもたないので, $\widetilde{f}$ は $p_{m+1}, \ldots, p_n$ に f と同じ位数の零点をもつ:

$$\mathrm{ord}_{p_j} \widetilde{f} = \mathrm{ord}_{p_j} f \qquad (j = m+2, \ldots, n). \tag{2.35}$$

従って

$$\begin{aligned} &\widetilde{f} \in L(\widetilde{\Lambda}), \qquad \widetilde{\Lambda} = (\widetilde{d}; \widetilde{\nu}_1, \ldots, \widetilde{\nu}_n) \\ &\widetilde{d} = (m-1)d - \nu_1 - \ldots - \nu_m, \\ &\widetilde{\nu}_i = (m-2)d - \nu_1 - \ldots - \widehat{\nu}_i - \ldots - \nu_m \quad (i = 1, \ldots, m), \\ &\widetilde{\nu}_j = \nu_j \qquad (j = m+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2.36}$$

こうして定まる $\mathbb{C}$ 線形写像 $f \to \widetilde{f}$ を

$$r_0 : L(\Lambda) \to L(\widetilde{\Lambda}) \tag{2.37}$$

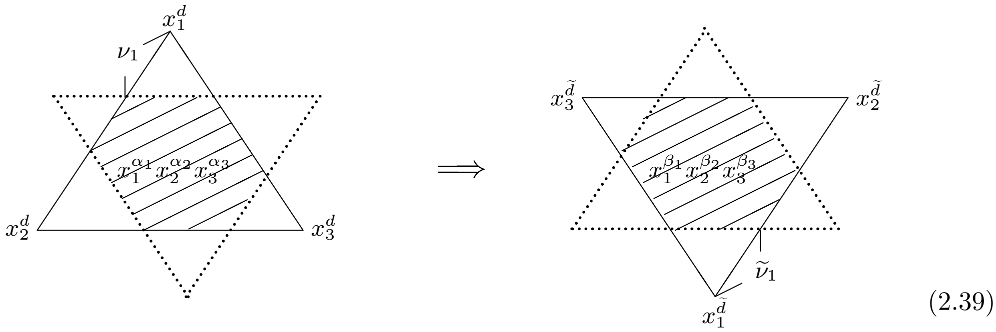
で表せば, 係数体の元 $c \in \mathbb{K}$ に対しては $r_0(cf) = s_0(c) r_0(f)$ を満たす．

$f \in L(\Lambda)$ に対する $r_0(f) \in L(\widetilde{\Lambda})$ を同次多項式のレベルでの Cremona 変換と考える訳であるが, f や $r_0(f)$ を単なる同次多項式と見ているのではないことに注意してほしい．つまり, Cremona 変換の同次多項式へのリフトは, 同次多項式に次数と零点の位数のデータ Λ を付与した対象 (線形系の元) に対して定義されているのであって, 単に同次多項式を与えただけでは, それの Cremona 変換を特定することはできない．

註釈 2.1 $m = 3$ として, d 次の単項式を次のように三角形に配置する．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & x_1^d & & & \\ & & x_1^{d-1}x_2 & & x_1^{d-1}x_3 & & \\ & & & \cdots & & & \\ & x_1x_2^{d-1} & & \cdots & & x_1x_3^{d-1} & \\ x_2^d & x_2^{d-1}x_3 & & \cdots & & x_2x_3^{d-1} & x_3^d \end{array} \tag{2.38}$$

上で考えた単項式の反転の操作は, 次のような図式で捉えることができる.



(2.39)

□

上記の対応 $\Lambda \mapsto \widetilde{\Lambda}$ は, ある格子への Weyl 群 $W_{m,n}$ の作用を通じて理解することができる. 階数 $n+1$ の格子

$$L_{m,n} = \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n \tag{2.40}$$

において, 次のような対称 2 次形式 $L_{m,n} \times L_{m,n} \to \mathbb{Z}$ を考える.

$$\begin{aligned} &(e_0 \,|\, e_0) = -(m-2), \qquad &&(e_j \,|\, e_j) = 1 \quad (j = 1, \ldots, n) \\ &(e_i \,|\, e_j) = 0 &&(i, j = 0, 1, \ldots, n; i \neq j). \end{aligned} \tag{2.41}$$

$L_{m,n}$ の点 $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ を

$$h_0 = e_0 - e_1 - \ldots - e_m, \quad h_j = e_j - e_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, n-1) \tag{2.42}$$

と定義すると, 内積値は

$$\begin{aligned} &(h_j \,|\, h_j) = 2 &&(j = 0, 1, \ldots, n-1), \\ &(h_0 \,|\, h_m) = -1, &&(h_0 \,|\, h_j) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1; j \neq m), \\ &(h_j \,|\, h_{j+1}) = -1 &&(j = 1, \ldots, n-2), \\ &(h_i \,|\, h_j) = 0 &&(i, j = 1, \ldots, n-1; |i-j| \geq 2). \end{aligned} \tag{2.43}$$

即ち, 行列 $A = \big((h_i \,|\, h_j)\big)_{i,j=0}^{n-1}$ が樹木 $T_{2,m,n-m}$ に対応する (一般) Cartan 行列となる. 従って

$$s_i(\Lambda) = \Lambda - (h_i \,|\, \Lambda)\, h_i \qquad (\Lambda \in L_{m,n}) \tag{2.44}$$

で定義される $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} : L_{m,n} \to L_{m,n}$ は Weyl 群 $W_{m,n}$ の一つの実現を与える. 今, $L_{m,n}$ の一般の元を

$$\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \ldots - \nu_n e_n \qquad (d, \nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{Z}) \tag{2.45}$$

と書いて, ベクトル $(d; \nu_1, \ldots, \nu_n)$ と対応させよう. このとき $(h_0 \,|\, \Lambda) = -(m-2) + \nu_1 + \cdots + \nu_m$ だから

$$\begin{aligned} s_0.\Lambda &= \Lambda + \big((m-2)d - \nu_1 - \ldots - \nu_m\big)h_0 \\ &= \widetilde{d}e_0 - \widetilde{\nu}_1 e_1 - \cdots - \widetilde{\nu}_n e_n = \widetilde{\Lambda} \end{aligned} \tag{2.46}$$

となる. つまり, 前に述べた対応 $\Lambda \mapsto \widetilde{\Lambda}$ は, 格子 $L_{m,n}$ への s_0 の作用に他ならない. s_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ の作用は, もちろん

$$(d; \nu_1, \ldots, \nu_k) \mapsto (d; \nu_1, \ldots, \nu_{k+1}, \nu_k, \ldots, \nu_n) \tag{2.47}$$

に対応している. 結局, 線形系 $L(\Lambda)$ $(\Lambda \in L_{m,n})$ に対して

$$r_0 \ : \ L(\Lambda) \to L(s_0.\Lambda) \tag{2.48}$$

が定義されたことになる.

$W_{m,n}$ の格子 $L_{m,n}$ の作用を用いると, 一般の点 $q = (z_1 : \ldots : z_{m-1} : 1)$ への $w \in W_{m,n}$ の作用 $q.w = (w(z_1) : \ldots : w(z_{m-1}) : 1)$ について次のことが示せる.

定理 2.2 (1) 任意の $j = 1, \ldots, n$ と $w \in W_{m,n}$ に対して $\dim_{\mathbb{K}} L(w.e_j) = 1$.
(2) 与えられた $w \in W_{m,n}$ に対して, 0 でない同次多項式

$$G_i(x) \in L(w.e_i), \quad F_i(x) \in L(ws_0.e_i) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.49}$$

を任意に選ぶと, 適当な定数 $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}^*$ に対して

$$(w(z_1) : \ldots : w(z_{m-1}) : 1) = \left(c_1 \frac{F_1(x)}{G_1(x)} : \ldots : c_m \frac{F_m(x)}{G_m(x)} \right) \tag{2.50}$$

となる.

この種の定理は, 古典的にも良く知られていることかもしれないが, 次の項で, 我々の観点からの証明を与える.

2.4 Weyl 群の作用を線形系に持上げること

各 $d \in \mathbb{Z}$ に対して同次座標 $x = (x_1, \ldots, x_m)$ の有理函数で d 次同次のもの全体を $\mathbb{K}(x)_d$ で表す:

$$\mathbb{K}(x)_d = x_m^d \, \mathbb{K}(x_1/x_m, \ldots, x_{m-1}/x_m) \subset \mathbb{K}(x). \tag{2.51}$$

$z_i = x_i/x_m$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ だから $d = 0$ のときの $\mathbb{K}(x)_0 = \mathbb{K}(z)$ は, $\mathbb{K}$ 上の射影空間 $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$ の有理函数体である. 今の設定では, $\mathbb{K} = \mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n})$ は配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ の有理函数体を表し, $\mathbb{K}(x)_0$ は配置空間 $\mathbb{X}_{m,n+1}$ の有理函数体 $\mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n+1})$ を表す. 特に $\mathbb{K}(x)_0$ には Weyl 群 $W_{m,n}$ が自己同型群として作用している.

前項の議論を踏まえて, 線形系 $L(\Lambda)$ $(\Lambda \in L_{m,n})$ を一斉に取扱う枠組みを導入しよう. 格子

$$L_{m,n} = \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n \tag{2.52}$$

の群環を乗法的に書いて

$$\mathbb{K}[L_{m,n}] = \bigoplus_{\Lambda \in L_{m,n}} \mathbb{K}\,\tau^{\Lambda}; \quad \tau^0 = 1, \quad \tau^{\Lambda}\,\tau^{\Lambda'} = \tau^{\Lambda+\Lambda'} \quad (\Lambda, \Lambda' \in L_{m,n}) \tag{2.53}$$

で表す. そこで, 次のような $\mathbb{K}$ 代数を考える.

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{\Lambda \in L_{m,n}} \mathbb{K}(x)_{\deg(\Lambda)}\, \tau^{\Lambda} \subset \mathbb{K}(x)[L_{m,n}]. \tag{2.54}$$

ここで $\Lambda \in L_{m,n}$ の e_0 の係数 ((2.45) での d) を $\deg(\Lambda)$ と記した. 係数を線形系 $L(\Lambda)$ に属する多項式に制限すれば $\mathcal{R}$ の部分環

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{\Lambda \in L_{m,n}} L(\Lambda)\, \tau^{\Lambda} \subset \mathcal{R} = \bigoplus_{\Lambda \in L_{m,n}} \mathbb{K}(x)_{\deg(\Lambda)}\, \tau^{\Lambda} \tag{2.55}$$

を得る. $x = (x_1, \ldots, x_m)$ の同次函数がどの $\Lambda \in L_{m,n}$ に属するかを明示的に表すため記号として「形式的指数函数」τ^{Λ} を導入した訳である.

$\mathbb{K}(x)_0 = \mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n+1})$ への Weyl 群 $W_{m,n}$ の作用を $\mathcal{R}$ まで拡張することを考えたい. 今 $\mathcal{R}$ の $\mathbb{C}$ 代数としての自己同型 $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ で, 次の条件を満たすものが得られたとしよう.

(1) $r_j : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ は, 任意の $\Lambda \in L_{m,n}$ に対して $\mathbb{C}$ 同型

$$r_j : \mathbb{K}(x)_{\deg(\Lambda)}\, \tau^{\Lambda} \ \stackrel{\sim}{\to}\ \mathbb{K}(x)_{\deg(s_j.\Lambda)} \tau^{s_j.\Lambda} \tag{2.56}$$

を誘導し, 特に $\Lambda = 0$ のときは $s_j : \mathbb{K}(x)_0 \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{K}(x)_0$ に一致する.

(2) $r_j : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ は, 部分環 $\mathcal{S}$ を保ち, 任意の $\Lambda \in L_{m,n}$ に対して $\mathbb{C}$ 同型

$$r_j : L(\Lambda)\, \tau^{\Lambda} \stackrel{\sim}{\to} L(s_j.\Lambda)\, \tau^{s_j.\Lambda} \tag{2.57}$$

を誘導する.

このような $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ があれば, 前項で述べた定理 2.2 が証明できる.
まず, $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ を用いて定理が証明されることを示す.

$$L(e_j) = \mathbb{K} \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad L(s_0.e_i) = \mathbb{K}\, x_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.58}$$

に注意する. 例えば $L(s_0.e_i) = \mathbb{K}\, x_i$ は,

$$s_0.e_i = h_0 + e_i = e_0 - e_1 - \cdots - \widehat{e_i} - \cdots - e_m \tag{2.59}$$

のような零点のパターンをもつ 1 次式は x_i の定数倍に限る — という意味である. 従って特に

$$\begin{aligned} &\tau^{e_j} \in \mathcal{S} && (j = 1, \ldots, n), \\ &x_i\, \tau^{s_0.e_i} = x_i\, \tau^{h_0 + e_i} \in \mathcal{S} && (i = 1, \ldots, m). \end{aligned} \tag{2.60}$$

$\mathcal{S}$ の元で以下の議論に必要な部分は, これらから生成される. $\mathcal{R}$ の元 $x_i \tau^{h_0}$ は $\mathcal{S}$ には属さないが, $\mathcal{S}$ の元の比

$$x_i\, \tau^{h_0} = \frac{x_i \tau^{s_0.e_i}}{\tau^{e_i}} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.61}$$

として表わされることに注意しておこう．今, Weyl 群 $W_{m,n}$ の元 w が任意に与えられたとして, $w(z_i)$ $(i=1,\ldots,m-1)$ を計算したい．そこで w を単純鏡映の積

$$w = s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_l} \qquad (j_1,\ldots,j_l \in \{0,1,\ldots,n-1\}) \tag{2.62}$$

に分解して, $\mathcal{R}$ の自己同型 ρ を

$$\rho = r_{j_1}r_{j_2}\cdots r_{j_l} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R}) \tag{2.63}$$

で定義する (ρ は w の分解に依存する)．$z_i \in \mathbb{K}(x)_0$ を $\mathcal{R}$ の元と見ると

$$w(z_i) = \rho\left(\frac{x_i}{x_m}\right) = \rho\left(\frac{x_i\tau^{h_0}}{x_m\tau^{h_0}}\right) = \frac{\rho(x_i\tau^{h_0})}{\rho(x_m\tau^{h_0})}. \tag{2.64}$$

だから, $\rho(x_i\tau^{h_0})$ $(i=1,\ldots,m)$ が決定できればよい．$x_i\tau^{h_0} \in \mathcal{R}$ を (2.61) のように $\mathcal{S}$ の元の比として表示すると

$$\rho(x_i\tau^{h_0}) = \rho\left(\frac{x_i\tau^{h_0+e_i}}{\tau^{e_i}}\right) = \frac{\rho(x_i\tau^{h_0+e_i})}{\rho(\tau^{e_i})}. \tag{2.65}$$

ρ は任意の $\Lambda \in L_{m,n}$ に対して, $\mathbb{C}$ 同型

$$\rho \ : \ L(\Lambda)\,\tau^{\Lambda} \ \xrightarrow{\sim}\ L(w.\Lambda)\,\tau^{w.\Lambda} \tag{2.66}$$

を誘導するから, $\rho(x_i\tau^{h_0+e_i})$, $\rho(\tau^{e_i})$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\rho(x_i\,\tau^{s_0.e_i}) &= F_i(x)\tau^{ws_0.e_i}, \qquad && F_i(x) \in L(ws_0.e_i),\\ \rho(\tau_i) &= G_i(x)\tau^{w.e_i}, && G_i(x) \in L(w.e_i).\end{aligned} \tag{2.67}$$

と表示される．従って

$$\rho\left(x_i\tau^{h_0}\right) = \frac{\rho(x_i\tau^{h_0+e_i})}{\rho(\tau^{e_i})} = \frac{F_i(x)}{G_i(x)}\,\tau^{w.h_0} \tag{2.68}$$

となり,

$$w(z_i) = \frac{\rho(x_i\tau^{h_0})}{\rho(x_m\tau^{h_0})} = \frac{F_i(x)\,G_m(x)}{G_i(x)\,F_m(x)} \qquad (i=1,\ldots,m-1). \tag{2.69}$$

これは

$$(w(z_1):\ldots:w(z_{m-1}):1) = \left(\frac{F_1(x)}{G_1(x)}:\ldots:\frac{F_m(x)}{G_m(x)}\right) \tag{2.70}$$

を意味する．ρ は $\mathbb{C}$ 同型 $L(e_i)\tau^{e_i} \xrightarrow{\sim} L(w.e_i)\tau^{w.e_i}$ を誘導するから, 任意の $w \in W_{m,n}$ に対して $\dim_{\mathbb{K}} L(w.e_j) = 1$ $(j=1,\ldots,n)$ となることも注意しておこう．(ρ は $\mathbb{K}$ 同型ではない．$\mathbb{K}$ の作用は w で変更されるが, ベクトルの $\mathbb{K}$ 上の 1 次独立性は ρ によって保たれる.)

$r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ を構成するには, 例えば次のようにすればよい．対称群 $\mathfrak{S}_n = \langle s_1,\ldots,s_{n-1}\rangle$ に関わる部分については, ひとまず $\mathbb{K}(x)$ の自己同型 r_k $(k=1,\ldots,n-1)$ を定義する．$c \in \mathbb{K}$

に対しては $r_k(c)=s_k(c)$ とし, 変数 $x_1,\ldots,x_m$ に対しては

$$\begin{aligned}
r_k(x_i) &= x_{s_k(i)} \qquad (k=1,\ldots,m-1; i=1,\ldots,m)\\
r_m(x_i) &= \begin{cases} -x_i+x_m & (i=1,\ldots,m-1)\\ x_m & (i=m)\end{cases}\\
r_{m+1}(x_i) &= \begin{cases} \dfrac{x_i}{u_{i,m+2}} & (i=1,\ldots,m-1)\\ x_m & (i=m)\end{cases}\\
r_k(x_i) &= x_i \qquad (k=m+2,\ldots,n-1; i=1,\ldots,m)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

とする (この定義も任意性がある). これを使って, $\mathcal{R}$ の元

$$\varphi(x)\tau^{\Lambda} \in \mathbb{K}(x)_{\deg(\Lambda)}\,\tau^{\Lambda} \tag{2.72}$$

に対しては

$$r_k(\varphi(x)\,\tau^{\Lambda}) = r_k(\varphi(x))\,\tau^{s_k\Lambda} \qquad (k=1,\ldots,n-1) \tag{2.73}$$

と定義する. 標準 Cremona 変換の持上げ r_0 については, 前項の r_0 に倣って

$$r_0(\varphi(x)\tau^{\Lambda}) = x_1^{d-\nu_1}\cdots x_m^{d-\nu_m}\ {}^{s_0}\varphi(x^{-1})\,\tau^{s_0.\Lambda}, \quad \Lambda = de_0-\nu_1e_1-\cdots-\nu_ne_n \tag{2.74}$$

とする. これで $r_0,r_1,\ldots,r_{n-1}\in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ に対する 2 つの要請が満たされる.

上で用いた $r_0,r_1,\ldots,r_{n-1}$ は「漫然と」定義したもので, 「標準的」とは言えないし, それらが $W_{m,n}$ の単純鏡映の基本関係式を満たす訳でもない. $w\in W_{m,n}$ から $\rho\in\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ を定義したが, ρ の定義が, w の単純鏡映への分解に依存しているのはそのような事情である. 従ってまた, F_i, G_i は定数倍 ($\mathbb{K}$ の元による積) の不定性を規格化することもできていない (にもかかわらず, 定理 2.2 についてはこのような漫然とした r_i で十分, というのがここでの証明の要点である).

代数 $\mathcal{R}$ やその部分環 $\mathcal{S}$ は, 同次座標系の取り方によらず自然に定義された対象である. 従って, $W_{m,n}$ の作用も何らかの意味で標準的に拡張され, しかも Weyl 群 $W_{m,n}$ の表現を与えるようにできることが望ましい.

> **問題:** $\mathbb{K}(x)_0$ への $W_{m,n}$ の作用の拡張として, 上記の 2 つの条件を満たす $\mathcal{R}$ の自己同型 $r_0,r_1,\ldots,r_{n-1}$ で Weyl 群 $W_{m,n}$ の単純鏡映の基本関係を満たすものが構成できるか？

という訳だが, どう解決すべきか今のところよく分からない. 問題点はいろいろあるが, 一つの主要な問題は, 上記のような標準 Cremona 変換 r_0 が同次座標系の選び方に依存していること, それをどう制御するかということであろう.

なお, 上で用いた群環 $\mathbb{K}[L_{m,n}]$ において $\tau_j=\tau^{e_j}$ $(j=0,1,\ldots,n)$ と書けば, $\mathbb{K}[L_{m,n}]$ は変数 $\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_n$ についての Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[\tau_0^{\pm1},\tau_1^{\pm1},\ldots,\tau_n^{\pm1}]$ と同一視され,

$$\Lambda = de_0-\nu_1e_1-\cdots-\nu_ne_n\in L_{m,n} \quad (d,\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{Z}) \tag{2.75}$$

の「形式的指数函数」 τ^Λ は τ 変数の単項式

$$\tau^\Lambda = \tau_0^d \tau_1^{-\nu_1} \cdots \tau_n^{-\nu_n} \tag{2.76}$$

に対応する．この τ 変数が「Cremona 変換の系の τ 函数」と呼ぶべきものである．

次節以降では, $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の点配置を, n 個の点が全てある楕円曲線上にあるような特殊なものに限定して考察する．そのような設定では, $\mathcal{R}$ の自己同型 $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ を標準的に構成することができて, Weyl 群 $W_{m,n}$ を線形系に付随する代数の自己同型群として実現することが可能である．その τ 函数への Weyl 群の作用が, 同次多項式 F_i, G_i (あるいは一般の τ コサイクル) を規格化するメカニズムを与える．

3 Cremona 変換の楕円函数による線形化

配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ への Weyl 群 $W_{m,n}$ の双有理的作用は非線形の作用である．この節では, Weyl 群 $W_{m,n}$ が線形に作用する線形空間 $\mathfrak{h}_{m,n}$ を導入し, 有理型写像 $\varphi_{m,n} : \mathfrak{h}_{m,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n}$ で $W_{m,n}$ 共変なものを, 楕円函数を用いて構成する．$\mathbb{X}_{m,n}$ の座標函数を従属変数と考えて, Cremona 変換群 $W_{m,n}$ の作用をそれらに対する函数方程式と見なせば, この「線形化写像」$\varphi_{m,n} : \mathfrak{h}_{m,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n}$ は, その方程式の一つの「楕円函数解」を与える訳である．

$W_{m,n}$ 共変な写像 $\varphi_{m,n} : \mathfrak{h}_{m,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n}$ の構成のためにまず, 楕円曲線を $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ に埋込む方法を指定することから始める．この節以降は, 記述の煩雑さを避けるために $m \geq 3$ と仮定する．f 以下では準周期的なテータ函数により楕円曲線を表す．$m = 3$ の場合など Weierstrass $\wp$ 函数を使う方が普通であるが, テータ函数を使うことにより一般の (m, n) でも普遍的に扱える利点がある．更に, τ 函数を導入するには準周期函数の導入は (多分) 不可欠である．なお, $m = 3$ の場合の $\wp$ 函数による表示との対応は 5.7 節に記す．

3.1 楕円曲線 $C_{\lambda,\mu} \subset \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$

$\mathbb{C}$ 上の 0 でない整函数 $[x]$ で, 奇函数 $([-x] = -[x])$ であって **Riemann 関係式**

$$\begin{aligned}&[x+y][x-y][u+v][u-v] \\ &= [x+u][x-u][y+v][y-v] - [x+v][x-v][y+u][y-u]\end{aligned} \tag{3.1}$$

を満たすものを固定しよう．$[x]$ の零点集合を $\Omega \in \mathbb{C}$ とおくと, Ω は $\mathbb{C}$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群となり, $[x]$ は Ω に関して次の形の擬周期性をもつ:

$$[x+\omega] = e(a_\omega x + b_\omega)\,[x] \qquad (\omega \in \Omega; a_\omega, b_\omega \in \mathbb{C}). \tag{3.2}$$

ここで指数函数の記号 $e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ を用いた．更に, Ω の階数に応じて, 整函数 $[x]$ は次の形に表されることが知られている: ある $c \in \mathbb{C}^*, a \in \mathbb{C}$ に対して

(1) 楕円的な場合: $\quad [x] = c\, e(ax^2)\, \sigma(x; \omega_1, \omega_2) \quad (\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\,\omega_2)$,
(2) 三角的な場合: $\quad [x] = c\, e(ax^2)\, \sin(\pi x/\omega_0) \quad (\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_0)$,
(3) 有理的な場合: $\quad [x] = c\, e(ax^2)\, x \quad (\Omega = \{0\})$.

ここで $\sigma(x;\omega_1,\omega_2)$ は周期格子 $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ に付随する Weierstrass シグマ函数 (Jacobi の楕円テータ函数のうち奇函数のものと実質的に同じ) である. ([24] によれば, この事実は Hermite による.) なお, Riemann 関係式は

$$\begin{gathered}[b+c][b-c][x+a][x-a]+[c+a][c-a][x+b][x-b] \\ +[a+b][a-b][x+c][x-c]=0\end{gathered} \tag{3.3}$$

の形に書く方が便利なこともある. このような記号 $[x]$ を用いるのは, 楕円テータ函数とその退化 (楕円曲線とその退化) を同じ形式で取扱うためである.

以下の議論においては, 次の Frobenius の公式 (Cauchy の補題) が本質的である. (これは, 一般の Rimann 面の場合の Fay の公式の, 楕円曲線とその退化の場合にあたる.)

定理 3.1 *$[x]$ を 0 でない奇の整函数で Riemann 関係式を満たすものとすると, 2 組の変数 $(x_1,\dots,x_m)$, $(y_1,\dots,y_m)$ とパラメータ λ に関して次の恒等式が成立する.*

$$\det\left(\frac{[\lambda+x_i-y_j]}{[\lambda]\,[x_i-y_j]}\right)_{i,j=1}^{m}=\frac{[\lambda+\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)]\,\Delta(x_m,\dots,x_1)\Delta(y_1,\dots,y_m)}{[\lambda]\displaystyle\prod_{1\le i,j\le m}[x_i-y_j]}. \tag{3.4}$$

ここで, $[x]$ による差積を

$$\Delta(x_1,\dots,x_m)=\prod_{1\le i<j\le m}[x_i-x_j] \tag{3.5}$$

と記した.

$m=2$ の場合の公式

$$\begin{aligned}&\frac{[\lambda+x_1-y_1][\lambda+x_2-y_2]}{[\lambda]^2[x_1-y_1][x_2-y_2]}-\frac{[\lambda+x_1-y_2][\lambda+x_2-y_1]}{[\lambda]^2[x_1-y_2][x_2-y_1]} \\ &=\frac{[\lambda+x_1+x_2-y_1-y_2][x_1-x_2][y_2-y_1]}{[\lambda][x_1-y_1][x_1-y_2][x_2-y_1][x_2-y_2]}\end{aligned} \tag{3.6}$$

は, Riemann 関係式に他ならない. 一般の m の場合は, 行列式の性質

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^{m}=a_{mm}^{2-m}\det(a_{ij}a_{mm}-a_{im}a_{jm})_{i,j=1}^{m-1} \tag{3.7}$$

を用いて m に関する帰納法で示せる.

今, $\lambda,\mu_1,\dots,\mu_m\in\mathbb{C}$ を定数で条件

$$[\lambda]\ne 0,\qquad [\mu_i-\mu_j]\ne 0\quad(1\le i<j\le m) \tag{3.8}$$

を満たすものとする ($\lambda,\mu_i-\mu_j\notin\Omega$ ということ). この条件の下で次のような正則写像

$$p_{\lambda,\mu}\ :\ \mathbb{C}\to\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}) \tag{3.9}$$

を考えることができる: $t \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} p(t) &= \left(\frac{[\lambda + \mu_1 - t]}{[\lambda][\mu_1 - t]} : \ldots : \frac{[\lambda + \mu_m - t]}{[\lambda][\mu_m - t]} \right) \\ &= \left([\lambda + \mu_1 - t] \prod_{i=2}^{m} [\mu_i - t] : \ldots : [\lambda + \mu_m - t] \prod_{i=1}^{m-1} [\mu_i - t] \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

更に, $[t]$ の擬周期性から, 正則写像 $p_{\lambda,\mu} : \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ も誘導される.

$$C_{\lambda,\mu} = \overline{p_{\lambda,\mu}(\mathbb{C}/\Omega)} \subset \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}) \tag{3.11}$$

とおくと, $C_{\lambda,\mu}$ は $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の m 個の座標原点

$$o_1 = (1 : 0 : \ldots : 0), \quad o_2 = (0 : 1 : 0 : \ldots : 0), \quad \ldots, \quad o_m = (0 : \ldots : 0 : 1) \tag{3.12}$$

を通る曲線で, 丁度 $\mu_i \in \mathbb{C}$ が点 $o_i \in C_{\lambda,\mu}$ に対応する: $p_{\lambda,\mu}(\mu_i) = o_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Ω の階数が 2 のときには $C_{\lambda,\mu}$ は非特異な楕円曲線であり, 階数が 1, 0 の場合は楕円曲線の退化と見なすことができる. 実際, 階数が 1 のときには $(1 : \ldots : 1) \in C_{\lambda,\mu}$ が結節点となり, 階数が 0 のときには $(1 : \ldots : 1) \in C_{\lambda,\mu}$ が尖点となる. 以下では, 主に Ω の階数が 2 の場合を想定して「楕円曲線」「楕円函数」という用語を用いるが, 当面この 3 種類の区別は必要としない. 明示的に断らない限り, 退化する場合も含むものと考えてほしい.

$m = 3, 4$ の場合に, この楕円曲線 $C_{\lambda,\mu}$ の定義方程式を書下しておく.

命題 3.2 $m = 3$ のとき, パラメータ $(\lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ で指定される曲線 $C_{\lambda,\mu} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ は次の同次式の零点集合である.

$$\begin{aligned} &\frac{[\mu_2 - \mu_1 + \lambda]}{[\mu_2 - \mu_1]} \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{[\mu_1][\mu_2 - \lambda]}{[\mu_1 - \lambda][\mu_2]} \right) - \frac{[\mu_1 - \mu_2 + \lambda]}{[\mu_1 - \mu_2]} \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{[\mu_2][\mu_1 - \lambda]}{[\mu_2 - \lambda][\mu_1]} \right) \\ &+ \frac{[\mu_3 - \mu_2 + \lambda]}{[\mu_3 - \mu_2]} \left(\frac{x_2}{x_3} - \frac{[\mu_2][\mu_3 - \lambda]}{[\mu_2 - \lambda][\mu_3]} \right) - \frac{[\mu_2 - \mu_3 + \lambda]}{[\mu_2 - \mu_3]} \left(\frac{x_3}{x_2} - \frac{[\mu_3][\mu_2 - \lambda]}{[\mu_3 - \lambda][\mu_2]} \right) \\ &+ \frac{[\mu_1 - \mu_3 + \lambda]}{[\mu_1 - \mu_3]} \left(\frac{x_3}{x_1} - \frac{[\mu_3][\mu_1 - \lambda]}{[\mu_3 - \lambda][\mu_1]} \right) - \frac{[\mu_3 - \mu_1 + \lambda]}{[\mu_3 - \mu_1]} \left(\frac{x_1}{x_3} - \frac{[\mu_1][\mu_3 - \lambda]}{[\mu_1 - \lambda][\mu_3]} \right) = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

命題 3.3 $m=4$ のとき, パラメータ $(\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)$ で指定される曲線 $C_{\lambda,\mu}\subset\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ は次の *2* つの同次式の共通零点である.

$$\begin{aligned}&\frac{[\mu_1-\mu_3+\lambda]}{[\mu_1-\mu_3]}\frac{x_3}{x_1}-\frac{[\mu_1-\mu_4+\lambda]}{[\mu_1-\mu_4]}\frac{x_4}{x_1}-\frac{[\mu_2-\mu_3+\lambda]}{[\mu_3-\mu_4]}\frac{x_3}{x_2}+\frac{[\mu_2-\mu_4+\lambda]}{[\mu_2-\mu_4]}\frac{x_4}{x_2}\\&\qquad+\frac{[\lambda][\mu_1+\mu_2-\mu_3-\mu_4][\mu_1-\mu_2][\mu_3-\mu_4]}{[\mu_1-\mu_3][\mu_1-\mu_4][\mu_2-\mu_3][\mu_2-\mu_4]}=0,\\&\frac{[\mu_1-\mu_2+\lambda]}{[\mu_1-\mu_2]}\frac{x_2}{x_1}-\frac{[\mu_1-\mu_4+\lambda]}{[\mu_1-\mu_4]}\frac{x_4}{x_1}-\frac{[\mu_3-\mu_2+\lambda]}{[\mu_2-\mu_4]}\frac{x_2}{x_3}+\frac{[\mu_3-\mu_4+\lambda]}{[\mu_3-\mu_4]}\frac{x_4}{x_3}\\&\qquad+\frac{[\lambda][\mu_1-\mu_2+\mu_3-\mu_4][\mu_1-\mu_3][\mu_2-\mu_4]}{[\mu_1-\mu_2][\mu_1-\mu_4][\mu_3-\mu_2][\mu_3-\mu_4]}=0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

$m=4$ のときは, もちろん添字の置換で得られる式も成立するが, 独立なものを 2 つだけ記した.

3.2 楕円曲線上の n 点配置

$\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある n 点の組 $(p_1,\ldots,p_n)$ のうち, n 個の点全てがこの曲線 $C_{\lambda,\mu}$ 上にあるものを考えよう. $\mathbb{C}^n$ の点

$$\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\mathbb{C}^n;\qquad[\varepsilon_i-\varepsilon_j]\neq0\quad(1\le i<j\le n)\tag{3.15}$$

に対して, $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の n 点 $p_1,\ldots,p_n$ を

$$p_j=p_{\lambda,\mu}(\varepsilon_j)\in\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})\qquad(j=1,\ldots,n)\tag{3.16}$$

で定義する. $p_{\lambda,\mu}(t)\in\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の同次座標を

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),\ldots,x_m(t))^{\mathrm{t}},\\&x_i(t)=[\lambda+\mu_i-t]\prod_{1\le k\le m;k\neq i}[\mu_k-t]=\frac{[\lambda+\mu_i-t]}{[\lambda][\mu_i-t]}[\lambda]\prod_{k=1}^m[\mu_k-t]\end{aligned}\tag{3.17}$$

で指定すれば, n 点の組 $(p_1,\ldots,p_n)$ に対応する $m\times n$ 行列 $X(\varepsilon)$ は

$$X(\varepsilon)=(\boldsymbol{x}(\varepsilon_1),\ldots,\boldsymbol{x}(\varepsilon_n))=(x_i(\varepsilon_j))_{1\le i\le m;1\le j\le n}\tag{3.18}$$

で与えられる. この行列を第 1 節で述べたやり方で標準形 $Y(\varepsilon)$, $U(\varepsilon)$ に変換して, その成分 $y_{ij}(\varepsilon)$, $u_{ij}(\varepsilon)$ を計算する. $1\le j_1,\ldots,j_m\le n$ のとき Frobenius の公式から

$$\begin{aligned}\det X(\varepsilon)_{j_1,\ldots,j_m}&=\det\left(x_a(\varepsilon_{j_b})\right)_{a,b=1}^m\\&=\det\left(\frac{[\lambda+\mu_a-\varepsilon_{j_b}]}{[\lambda][\mu_a-\varepsilon_{j_b}]}\right)_{a,b=1}^m[\lambda]^m\prod_{a,b=1}^m[\mu_a-\varepsilon_{j_b}]\\&=[\lambda]^{m-1}[\lambda+\sum_{a=1}^m(\mu_a-\varepsilon_{j_a})]\Delta(\mu_m,\ldots,\mu_1)\Delta(\varepsilon_{j_1},\ldots,\varepsilon_{j_m})\end{aligned}\tag{3.19}$$

を得る. 以下, 記号の簡約のために

$$\varepsilon_0 = \lambda + \sum_{k=1}^{m} \mu_k \tag{3.20}$$

とおく. また

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j} &= \varepsilon_i - \varepsilon_j && (i, j \in \{1, \ldots, n\}) \\ \varepsilon_{j_1,\ldots,j_m} &= \varepsilon_0 - \varepsilon_{j_1} - \cdots - \varepsilon_{j_m} && (j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

という略記法を用いる. (違う種類の 1 次函数を似たような記号で表しているので紛らわしいかもしれないが, 今は $m \geq 3$ としているので混乱はないものと期待する.) この記号で書けば

$$\det X(\varepsilon)_{j_1,\ldots,j_m} = [\lambda]^{m-1} [\varepsilon_{j_1,\ldots,j_m}] \, \Delta(\mu_m, \ldots, \mu_1) \, \Delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m). \tag{3.22}$$

特に $[\varepsilon_{j_1,\ldots,j_m}] \neq 0$ $(1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n)$ ならば n 点の組 $(p_1, \ldots, p_n)$ は一般の位置にあることが分かる. これを用いると, $y_{ij}(\varepsilon)$, $u_{ij}(\varepsilon)$ は次のように計算される.

補題 3.4 パラメータ $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_m$ が条件 $[\lambda] \neq 0$, $[\mu_i - \mu_j] \neq 0$ $(1 \leq i < j \leq m)$ を満たすとし, $\varepsilon_0 = \lambda + \sum_{k=1}^{m} \mu_k$ とおく. このとき,

(1) $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ に対する条件

$$[\varepsilon_{ij}] \neq 0 \quad (1 \leq i < j \leq n), \qquad [\varepsilon_{j_1,\ldots,j_m}] \neq 0 \quad (1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n) \tag{3.23}$$

の下で, 楕円曲線 $C_{\lambda,\mu}$ 上の n 点の組 $(p_1, \ldots, p_n)$ は一般の位置にあり, 対応する $\mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C})$, $\mathbb{X}_{m,n}$ の点の座標は, それぞれ次で与えられる.

$$\begin{aligned} y_{i,j}(\varepsilon) &= \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{i,j}]}{[\alpha_0]} \prod_{1 \leq k \leq m; k \neq i} \frac{[\varepsilon_{k,j}]}{[\varepsilon_{k,i}]} \\ & \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = m+1, \ldots, n) \\ u_{i,j}(\varepsilon) &= \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]}{[\alpha_0 + \varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]} \, \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{i,j}][\varepsilon_{m,j}]}{[\alpha_0 + \varepsilon_{m,j}][\varepsilon_{i,j}]} \\ & \quad (i = 1, \ldots, m-1;\ j = m+2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{3.24}$$

ここで $\alpha_0 = \varepsilon_{1,2,\ldots,m}$ と記した.

(2) 配置空間の座標 $u_{i,j}(\varepsilon)$ は $n+1$ 個の変数 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ の全てについて Ω 周期的である.

ここでは, n 点 $p_1, \ldots, p_m$ の同次座標を (3.17) の $\boldsymbol{x}(\varepsilon_1), \ldots, \boldsymbol{x}(\varepsilon_n)$ で指定することにより, 楕円曲線のパラメータ付け $p_{\lambda,\mu} : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ に対応する有理型写像

$$\boldsymbol{p}_{\lambda,\mu} \ : \ \begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n & \dashrightarrow & \mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{X}_{m,n} \\ \varepsilon & \mapsto & GL_m(\mathbb{C})\, X_{\lambda,\mu}(\varepsilon) & \mapsto & GL_m(\mathbb{C})\, X_{\lambda,\mu}(\varepsilon)\, T_n \end{array} \tag{3.25}$$

を構成した．(念のため $X(\varepsilon)$ の λ, μ への依存性も明示した.) 重要なことは, $p_{\lambda,\mu} : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ に含まれていたパラメータ $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_m$ が, Grassman 多様体の座標でも, 配置空間の座標でも, 唯 1 個のパラメータ $\varepsilon_0 = \lambda + \mu_1 + \cdots + \mu_m$ の中に集約されているということである．しかも構成法から, 上記の $\boldsymbol{p}_{\lambda,\mu}$ は $\mathbb{C}^n$ への n 次対称群 $\mathfrak{S}_n = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ の, 座標の置換による作用に関して, $\mathfrak{S}_n$ 共変となっている．

パラメータ ε_0 は $\mathfrak{S}_n$ に関して不変なことに注意して, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ を標準座標系とする線形空間 $\mathfrak{h}_{m,n} = \mathbb{C}^{1+n}$ を考えよう．このとき, 有理型写像

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^{1+m+n} & \dashrightarrow & \mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{X}_{m,n} \\ (\lambda, \mu, \varepsilon) & \mapsto & GL_m(\mathbb{C})X_{\lambda,\mu}(\varepsilon) & \mapsto & GL_m(\mathbb{C})X_{\lambda,\mu}(\varepsilon)T_n \end{array} \tag{3.26}$$

から自然に, $\mathfrak{S}_n$ 共変な有理型写像

$$\varphi_{m,n} : \ \mathfrak{h}_{m,n} \ \dashrightarrow \ \mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C}) \ \to \ \mathbb{X}_{m,n} \tag{3.27}$$

が誘導される．これが我々の「線形化写像」である．次の項で, $\mathfrak{h}_{m,n}$ と, 樹木 $T_{2,m,n-m}$ に付随する Kac-Moody Lie 環の Cartan 部分環との同一視を行う．それによって $\mathfrak{h}_{m,n}$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用は Weyl 群 $W_{m,n} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ の作用に拡大され, $\varphi_{m,n} : \ \mathfrak{h}_{m,n} \to \mathbb{X}_{m,n}$ は自然に $W_{m,n}$ 共変な有理型写像となる．

今 $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ を座標とするアフィン空間 $\mathfrak{h}_{m,n} = \mathbb{C}^{1+n}$ に対応して, $E_{m,n} = (\mathbb{C}/\Omega)^{1+n}$ と定義すると, 上の補題の (2) から有理型写像

$$\varphi_{m,n} : E_{m,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n} \tag{3.28}$$

が得られる．$\mathfrak{h}_{m,n}$, $E_{m,n}$ において, 補題に述べた条件 (3.23) を満たす点全体のなす開集合を仮に $\mathfrak{h}'_{m,n}$, $E'_{m,n}$ で表せば, 補題 3.4 によって正則写像

$$\mathfrak{h}'_{m,n} \to \mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C}), \qquad E'_{m,n} \to \mathbb{X}_{m,n} \tag{3.29}$$

が構成されたことになる．今後は, 記号 ε を $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ の意味で用いる．補題 3.4 もその意味で解釈する．

3.3 線形化写像

$n > m \geq 3$ なる整数の組 (m, n) に対して, 改めて $n+1$ 次元の線形空間

$$\mathfrak{h}_{m,n} = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \tag{3.30}$$

を考え, 対称な双線形形式 $(\ |\ ) : \mathfrak{h}_{m,n} \times \mathfrak{h}_{m,n} \to \mathbb{C}$ を

$$\begin{gathered} (e_0 \,|\, e_0) = -(m-2), \qquad (e_j \,|\, e_j) = 1 \quad (j = 1, \ldots, n), \\ (e_i \,|\, e_j) = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n;\ i \neq j) \end{gathered} \tag{3.31}$$

で定義する．$\mathfrak{h}_{m,n}$ は, 前節で扱った格子 $L_{m,n}$ の複素化に他ならない: $\mathfrak{h}_{m,n} = L_{m,n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. ($m = 2$ のときは, この形の対称 2 次形式は退化するので, e_0 なしで定式化した方がよい.) こ

の対称 2 次形式の誘導する同型 $\mathfrak{h}_{m,n} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{m,n}^*$ を用いて, e_j に対応する $\mathfrak{h}_{m,n}^*$ の元を

$$\varepsilon_j = (e_j \,|\, \cdot\,) \in \mathfrak{h}_{m,n}^* \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) \tag{3.32}$$

で定義すれば,

$$\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \ : \mathfrak{h}_{m,n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{1+n} \tag{3.33}$$

が $\mathfrak{h}_{m,n}$ の座標系を与える. 必要に応じて, $\mathfrak{h}_{m,n}^*$ にも同型 $\mathfrak{h}_{m,n} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{m,n}^*$ で誘導される対称 2 次形式を導入する. e_j を ε_j に読替えるだけなので,

$$\begin{gathered} (\varepsilon_0 \,|\, \varepsilon_0) = -(m-2), \qquad (\varepsilon_j \,|\, \varepsilon_j) = 1 \quad (j = 1, \ldots, n), \\ (\varepsilon_i \,|\, \varepsilon_j) = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n;\ i \neq j). \end{gathered} \tag{3.34}$$

$h_j \in \mathfrak{h}_{m,n}$ 及び $\alpha_j \in \mathfrak{h}_{m,n}^*$ を

$$\begin{aligned} &h_0 = e_0 - e_1 - \cdots - e_m, \qquad &&h_j = e_j - e_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, n-1) \\ &\alpha_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_m, \qquad &&\alpha_j = \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{3.35}$$

で定義すると, 自然な双線形写像 $\langle \ ,\ \rangle\ :\ \mathfrak{h}_{m,n} \times \mathfrak{h}_{m,n}^* \to \mathbb{C}$ に関して行列 $A = \big(\langle h_i, \alpha_j \rangle\big)_{i,j=0}^{n-1}$ は樹木 $T_{2,m,n-n}$ に対応する (一般) Cartan 行列となる. 従って $\mathfrak{h}_{m,n}$, $\mathfrak{h}_{m,n}^*$ の両方に Weyl 群 $W_{m,n} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ が作用する:

$$\begin{aligned} s_k.h &= h - \langle h, \alpha_k \rangle\, h_k \qquad &&(h \in \mathfrak{h}_{m,n}), \\ s_k.\lambda &= \lambda - \alpha_k\, \langle h_k, \lambda \rangle \qquad &&(\lambda \in \mathfrak{h}_{m,n}^*). \end{aligned} \tag{3.36}$$

これについて,

$$\langle w.h, w.\lambda \rangle = \langle h, \lambda \rangle \qquad (h \in \mathfrak{h}_{m,n},\quad \lambda \in \mathfrak{h}_{m,n}^*) \tag{3.37}$$

が成立する. $W_{m,n}$ の $\mathfrak{h}_{m,n}$ への作用は, 適宜

$$h.w = w^{-1}.h \qquad (h \in \mathfrak{h}_{m,n},\quad w \in W_{m,n}) \tag{3.38}$$

により右作用に読替える. この記号では

$$\langle h.w, \lambda \rangle = \langle h, w.\lambda \rangle \qquad (h \in \mathfrak{h}_{m,n},\quad \lambda \in \mathfrak{h}_{m,n}^*) \tag{3.39}$$

である.

Weyl 群 $W_{m,n} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ の, $\mathfrak{h}_{m,n}$ の座標函数 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ への作用を書下しておく. s_0 の作用は

$$\begin{aligned} s_0(\varepsilon_0) &= \varepsilon_0 + (m-2)\alpha_0 = (m-1)\varepsilon_0 - (m-2)(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m), \\ s_0(\varepsilon_i) &= \varepsilon_i + \alpha_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \cdots - \widehat{\varepsilon_i} - \cdots - \varepsilon_m \quad (i = 1, \ldots, m), \\ s_0(\varepsilon_j) &= \varepsilon_j \qquad (j = m+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{3.40}$$

s_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ の作用は

$$s_k(\varepsilon_0) = \varepsilon_0, \qquad s_k(\varepsilon_j) = \varepsilon_{s_k(j)} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.41}$$

である. 添字の $s_k(j)$ は隣接互換 $(k,k+1)$ の j への作用を表す.

上記の構成は, 樹木 $T_{2,m,n-m}$ を Dynkin 図形にもつルート系の実現 (Kac-MoodyLie 環の Cartan 部分環) を与えたものであり, $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ がそのルート系の単純ルートである. 単純ルートに Weyl 群の元を作用させて得られるような $\mathfrak{h}_{m,n}$ 上の 1 次函数は実ルートと呼ばれる. 実ルートの全体を

$$\Delta^{\mathrm{Re}}_{m,n} = W_{m,n}\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}\}\subset \mathfrak{h}^*_{m,n} \tag{3.42}$$

で表す. $\varphi_{m,n}$ の構成に現れた 1 次函数

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j} &= \varepsilon_i-\varepsilon_j \qquad (1\le i<j\le n)\\ \varepsilon_{j_1,\dots,j_m} &= \varepsilon_0-\varepsilon_{j_1}-\cdots-\varepsilon_{j_m} \quad (1\le j_1<\cdots<j_m\le n) \end{aligned} \tag{3.43}$$

は典型的な実ルートである.

註釈 3.5 $L_{m,n}$ の元 c を

$$c=\begin{cases} me_0-(m-2)(e_1+\cdots+e_n) & (m \text{ が奇数のとき})\\ \dfrac{m}{2}e_0-\dfrac{m-2}{2}(e_1+\cdots+e_n) & (m \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \tag{3.44}$$

と定義すると, c は $h_0,h_1,\dots,h_{n-1}$ の全てと直交し,

$$\{\Lambda\in L_{m,n} \mid (h_j|\Lambda)=0 \quad (j=0,1,\dots,n-1)\}=\mathbb{Z}\,c \tag{3.45}$$

となる. 特に c は $W_{m,n}$ 不変である. 対応する $\mathfrak{h}^*_{m,n}$ の元を

$$\delta=\begin{cases} m\varepsilon_0-(m-2)(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n) & (m \text{ が奇数のとき})\\ \dfrac{m}{2}\varepsilon_0-\dfrac{m-2}{2}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n) & (m \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \tag{3.46}$$

で表す. $W_{m,n}$ 不変な $\mathfrak{h}^*_{m,n}$ の元はこの δ の定数倍に限る. □

前項で構成した有理型写像

$$\varphi_{m,n}\ :\ \mathfrak{h}_{m,n}\dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n} \tag{3.47}$$

を考えよう. 線形空間 $\mathfrak{h}_{m,n}$ の座標系 $\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ と配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ の座標系 $u=(u_{i,j})_{1\le i\le m-1; m+2\le j\le n}$ を用いると, 有理型写像 $\varphi_{m,n}$ は

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n}:\quad u_{ij}=u_{ij}(\varepsilon) &= \frac{[\alpha_0+\varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]}{[\alpha_0+\varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]}\,\frac{[\alpha_0+\varepsilon_{i,j}][\varepsilon_{m,j}]}{[\alpha_0+\varepsilon_{m,j}][\varepsilon_{i,j}]}\\ &(i=1,\dots,m-1;\ j=m+2,\dots,n) \end{aligned} \tag{3.48}$$

で与えられている. この写像が, $\mathfrak{h}_{m,n}$ と $\mathbb{X}_{m,n}$ への $W_{m,n}$ の右作用と両立することを確認しよう. これは任意の $w\in W_{m,n}$ が与えられたとき, 一般な (特殊でない) $h\in\mathfrak{h}_{m,n}$ に対しては

$$\varphi_{m,n}(h.w)=\varphi_{m,n}(h).w \tag{3.49}$$

が成立することを意味する. 座標系の言葉で言えば, 任意の i,j に対して

$$u_{ij}(w(\varepsilon)) = w(u_{ij})(\varepsilon), \quad \text{即ち} \quad u_{ij}(w(\varepsilon)) = S_{ij}^{w}(u(\varepsilon)) \tag{3.50}$$

が成立することに他ならない. ここで, $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ に対して, $w(\varepsilon)$ は, w の $\varepsilon_j \in \mathfrak{h}_{m,n}^{*}$ への作用で決まる $\mathfrak{h}_{m,n}$ 上の 1 次函数の組

$$w(\varepsilon) = (w(\varepsilon_0), w(\varepsilon_1), \ldots, w(\varepsilon_n)) \tag{3.51}$$

を表す. また, $\mathcal{K}(\mathbb{X}_{m,n})$ の自己同型 w による $u_{i,j}$ の像として決まる u 変数の有理函数を $w(u_{ij}) = S_{ij}^{w}(u)$ と記した. 任意の w に対して (3.50) の成立を示すには $w = s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ の場合のみ検証すれば十分な訳だが, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の s_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ については, 構成法から既に成立が保証されている. (これを $u_{ij}(\varepsilon)$ の式だけをみて直接検証しようと思ったら, Riemann 関係式を使って証明することになる.) 残った $w = s_0$ の場合を検証しよう.

$$s_0(u_{ij}) = \frac{1}{u_{ij}}, \qquad \text{即ち} \quad R_{ij}^{s_0}(u) = \frac{1}{u_{ij}} \tag{3.52}$$

だから, 示すべき式は

$$u_{ij}(s_0(\varepsilon)) = \frac{1}{u_{ij}(\varepsilon)} \qquad (1 \le i \le m-1;\ m+2 \le j \le n) \tag{3.53}$$

である. $1 \le i \le m$, $m+1 \le j \le n$ のとき

$$s_0(\varepsilon_{ij}) = \alpha_0 + \varepsilon_{ij}, \qquad s_0(\alpha_0 + \varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ij}, \tag{3.54}$$

つまり s_0 の作用で

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \qquad \alpha_0 + \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \cdots - \widehat{\varepsilon_i} - \cdots - \varepsilon_m - \varepsilon_j \tag{3.55}$$

が入れ替ることに注意すると, s_0 の作用で $u_{i,j}(\varepsilon)$ の分子と分母が入れ替って逆数に移ることが見てとれる. 以上の議論で, 次の定理が示された.

定理 3.6 *Weyl* 群 $W_{m,n}$ の $\mathfrak{h}_{m,n}$ への標準的な線形作用と $\mathbb{X}_{m,n}$ への 双有理変換群としての非線形作用に関して, (3.48) で定義される有理型写像

$$\varphi_{m,n}:\ \mathfrak{h}_{m,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n} \tag{3.56}$$

は $W_{m,n}$ 共変である.

つまり, 配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ 上に定義される $W_{m,n}$ の双有理作用の系

$$u_{ij}(w(\varepsilon)) = S_{ij}^{w}(u(\varepsilon)) \qquad (w \in W_{m,n}) \tag{3.57}$$

に対して, (3.48) は, その 1 つの楕円函数解を与えている訳である.

なお,

$$\mathfrak{h}_{m,n} = L_{m,n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{1+n} \tag{3.58}$$

に対して, 格子 $L_{m,n} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega$ による商

$$E_{m,n} = L_{m,n} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{C}/\Omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}/\Omega)^{1+n} \tag{3.59}$$

を考えると, Weyl 群 $W_{m,n}$ は $E_{m,n}$ にも自然に作用するので, 線形化写像 $\varphi_{m,n}$ から $W_{m,n}$ 共変な有理型写像

$$\varphi_{m,n}: \ E_{m,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n} \tag{3.60}$$

が誘導される. $E_{m,n}$ においては, 有限個の「超平面」

$$[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad (1 \le i < j \le n), \qquad [\varepsilon_{j_1,\ldots,j_m}] = 0 \quad (1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n), \tag{3.61}$$

を除外すれば, $\varphi_{m,n}$ は正則写像であった. 除く部分は, $E_{m,n}$ への $W_{m,n}$ の作用に関して, 実ルートの鏡映面の有限個の和集合となっている訳である.

3.4 楕円曲線のパラメータ付け

この節では, $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_m$ をパラメータとして同次座標

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)), \\ x_i(t) = [\lambda + \mu_i - t] \prod_{1 \le k \le m; k \ne i} [\mu_k - t] \quad (i = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{3.62}$$

を用いて, 楕円曲線 $C_{\lambda,\mu} \subset \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ のパラメータ付けを行った. $\mathfrak{h}_{m,n}$ の座標 $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ と, $C_{\lambda,\mu}$ のパラメータの間に

$$\lambda + \sum_{k=1}^{m} \mu_k = \varepsilon_0 \tag{3.63}$$

なる関係が成立するという要請の下で, $C_{\lambda,\mu}$ 上の n 個の点の同次座標の組 $X = (\boldsymbol{x}(\varepsilon_1), \ldots, \boldsymbol{x}(\varepsilon_n))$ から決まる配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ の点を対応させて, 線形化写像 ($W_{m,n}$ 共変な有理型写像) $\varphi_{m,n}$: $\mathfrak{h}_{m,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{m,n}$ を構成した. λ, μ の ε 変数への依存性については, (3.63) が唯一の制約条件である. 楕円曲線 $C_{\lambda,\mu}$ のパラメータ λ, μ の選び方にはそれだけの自由度が残っているが, Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C})$ に移った段階で $GL_m(\mathbb{C})$ の作用によって, この自由度が吸収されてしまう訳である. 以下では, $\mathfrak{h}_{m,n}$ の点から出発して線形化写像を構成するという立場に立って, 楕円曲線のパラメータ λ, μ の ε 変数への依存性をどう指定するかを考えたい. $W_{m,n}$ の点の ε 変数の作用によって楕円曲線が動くことを許容するかしないか, n 個の点に関する対称性を尊重するかしないかなど, どう考えるかによっていろいろな選択が可能であるが, ここでは 2 通りのやり方を述べる.

楕円曲線のパラメータ付け (その１)

最初に述べるのは, 楕円曲線を動かさず, しかも n 点を対等に扱う方法である. 定数 $c_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, m)$ で条件

$$[c_1 + \cdots + c_m] \ne 0, \qquad [c_i - c_j] \ne 0 \quad (1 \le i < j \le m) \tag{3.64}$$

を満たすものを任意に固定し $c_0=-(c_1+\cdots+c_m)$ とおく. これを使って $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の楕円曲線 C_0 をパラメータ付け

$$
\begin{aligned}
&C_0: \quad p(u)=(x_1(u):\cdots:x_m(u)) \qquad (u\in\mathbb{C})\\
&x_i(u)=[c_0+c_i-u]\prod_{1\le k\le m;k\ne i}[c_k-u] \quad (i=1,\ldots,m)
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

によって定義する ($C_0=\overline{p(\mathbb{C})}$ とおく). このとき, 一般な $\varepsilon\in\mathfrak{h}_{m,n}$ に対応する n 点配置は

$$
\varphi_{m,n}(\varepsilon)=[\,p(a_1),\ldots,p(a_n)]\in\mathbb{X}_{m,n}, \qquad a_j=\varepsilon_j-\frac{\varepsilon_0}{m} \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{3.66}
$$

で与えられる. この実現は, 前項の議論でのパラメータ λ,μ_i と楕円曲線の座標 t を

$$
\lambda=c_0=-\sum_{k=1}^{m}c_k, \quad \mu_i=c_i+\frac{\varepsilon_0}{m} \quad (i=1,\ldots,m), \quad t=u+\frac{\varepsilon_0}{m} \tag{3.67}
$$

に取替えたものになっている. このとき $\alpha_0=-(a_1+\cdots+a_m)$, $\varepsilon_{i,j}=a_i-a_j$ となるので, 改めて

$$
a_0=-(a_1+\cdots+a_m), \qquad a_{i,j}=a_i-a_j \tag{3.68}
$$

と書けば, $m\times n$ 行列 $X=(\boldsymbol{x}(a_1),\ldots,\boldsymbol{x}(a_n))$ に対応する $\mathrm{Grass}^*_{m,n}(\mathbb{C})$, $\mathbb{X}_{m,n}$ の点の座標はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
y_{i,j}\ &=\frac{[a_0+a_{i,j}]}{[a_0]}\prod_{1\le k\le m;k\ne i}\frac{[a_{k,j}]}{[a_{k,i}]}\\
u_{i,j}\ &=\frac{[a_0+a_{m,m+1}][a_{i,m+1}]}{[a_0+a_{i,m+1}][a_{m,m+1}]}\,\frac{[a_0+a_{i,j}][a_{m,j}]}{[a_0+a_{m,j}][a_{i,j}]}
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

と表される. この a 座標で書けば Weyl 群 $W_{m,n}$ の作用は

$$
\begin{aligned}
&s_0(a_j)=\begin{cases} a_j+\dfrac{2}{m}a_0 & (j=1,\ldots,m)\\[2mm] a_j-\dfrac{m-2}{m}a_0 & (j=m+1,\ldots,n)\end{cases}\\
&s_k(a_j)=a_{s_k(j)} \qquad (k=1,\ldots,n-1;\ j=1,\ldots,n)
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

で与えられる. ($a_0=\alpha_0$ だから $s_0(a_0)=-a_0$ である.)

この実現では, 楕円曲線 C_0 はどのような Cremona 変換 $w\in W_{m,n}$ でも不変に保たれる. 但し, C_0 の座標 $u=t-\dfrac{\varepsilon_0}{m}$ を標準 Cremona 変換 s_0 によって

$$
s_0(u)=u-\frac{m-2}{m}a_0 \tag{3.71}
$$

と変更する必要がある.

楕円曲線のパラメータ付け (その 2)

次に述べるのは, 最初の m 点 $p_1,\ldots,p_m\in\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ を固定し, 楕円曲線自身は Cremona 変換によって動かす方法である. ε_0 と最初の m 点に対応するパラメータ $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ を使って m 個の整函数 $x_i(\varepsilon;t)$ を

$$
x_i(\varepsilon;t)=[\alpha_0+\varepsilon_i-t]\prod_{1\le k\le m;k\ne i}[\varepsilon_k-t] \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{3.72}
$$

で定義する.

$$[\alpha_0] \neq 0, \qquad [\varepsilon_{ij}] \neq 0 \quad (1 \leq i < j \leq m) \tag{3.73}$$

の下で, 楕円曲線 $C(\varepsilon)$ をパラメータ付け

$$C(\varepsilon): \quad p_\varepsilon(t) = (x_1(\varepsilon; t) : \cdots : x_m(\varepsilon; t)) \qquad (t \in \mathbb{C}) \tag{3.74}$$

で定義する ($C(\varepsilon) = \overline{p_\varepsilon(\mathbb{C})}$). ($x_i(\varepsilon; t)$, $p_\varepsilon(t)$, $C(\varepsilon)$ の何れも $\varepsilon' = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ にしか依存しないが, 記号が煩雑になるのを避けるため, これらの変数への依存性を単に ε で表示している.) このとき, $C(\varepsilon)$ 上の n 点 $p_j = p_\varepsilon(\varepsilon_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ が, 一般な $\varepsilon \in \mathfrak{h}_{m,n}$ に対応する n 点配置を与える.

$$\varphi_{m,n}(\varepsilon) = [p_\varepsilon(\varepsilon_1), \ldots, p_\varepsilon(\varepsilon_n)] \in \mathbb{X}_{m,n}. \tag{3.75}$$

n 点の同次座標については

$$x_i(\varepsilon; \varepsilon_j) = \begin{cases} \delta_{ij}\,[\alpha_0] \displaystyle\prod_{1 \leq k \leq m; k \neq i} [\varepsilon_{k,i}] & (j = 1, \ldots, m), \\ [\alpha_0 + \varepsilon_{i,j}] \displaystyle\prod_{1 \leq k \leq m; k \neq i} [\varepsilon_{k,j}] & (j = m+1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3.76}$$

なので, $m \times n$ 行列 $X(\varepsilon) = (\boldsymbol{x}(\varepsilon; \varepsilon_1), \ldots, \boldsymbol{x}(\varepsilon; \varepsilon_n))$ の最初の m 列は対角行列をなし, $p_i = o_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ となっている. この実現は, 前項の議論でのパラメータを

$$\lambda = \alpha_0 = \varepsilon_0 - \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k, \qquad \mu_i = \varepsilon_i \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.77}$$

で特殊化したものである.

Cremona 変換 $w \in W_{m,n}$ によって n 点配置 $[p_1, \ldots, p_n]$ が $[q_1, \ldots, q_n] = [p_1, \ldots, p_n].w$ に移るとすると, この新しい n 点配置は, 楕円曲線 $C(w(\varepsilon))$ 上の n 点

$$q_j = p_{w(\varepsilon)}(w(\varepsilon_j)) \in C(w(\varepsilon)) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.78}$$

の定める n 点配置に移る. なお, $m = 3, 4$ のとき $C(\varepsilon)$ の定義方程式は, 命題 3.2, 3.3 で掲げた定義方程式で, $\lambda = \alpha_0$, $\mu_i = \varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ という置き換えを行ったもの. $C(w(\varepsilon))$ の定義方程式は, $C(\varepsilon)$ の定義方程式で, 係数に現れる ε 変数に w を作用させたものである.

4 $W_{m,n}$ 型楕円 Cremona 系とその τ 函数

4.1 楕円 Cremona 系と離散 Painlevé 系

前節から引続き, $m \geq 3$ と仮定する. 第 2 節で考察したように, $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある n 点の配置空間 $\mathbb{X}_{m,n}$ と $n+1$ 点の配置空間 $\mathbb{X}_{m,n+1}$ の相対的な状況を考察しよう. これは, $W_{m,n}$ 共変な射影

$$\pi \;:\; \mathbb{X}_{m,n+1} \to \mathbb{X}_{m,n} : \; [p_1, \ldots, p_n, q] \mapsto [p_1, \ldots, p_n] \tag{4.1}$$

で定式化される．第 2 節の記号を踏襲すれば, 上側の空間 $\mathbb{X}_{m,n+1}$ への $W_{m,n}$ の双有理作用は, 座標

$$
\begin{aligned}
&u_{i,j} && (i=1,\ldots,m-1;\ j=m+2,\ldots,n),\\
&z_i=u_{i,n+1} && (i=1,\ldots,m-1)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

に関して

$$
w(u_{i,j})=S^w_{i,j}(u),\quad w(z_i)=R^w_i(u;z)\qquad (w\in W_{m,n})
\tag{4.3}
$$

と表現される．ここで, $u=(u_{i,j})_{i,j}$ は, $W_{m,n}$ に属する Cremona 変換が参照する n 点配置 $[p_1,\ldots,p_n]$ のパラメータであり, $z=(z_1,\ldots,z_{m-1})$ が一般の点 $q=p_{n+1}$ の, Cremona 変換による動きを記述する．

以下で考察したいのは, 特に n 点配置が前節の線形化写像

$$
\varphi_{m,n}:\mathfrak{h}_{m,n}\dashrightarrow\mathbb{X}_{m,n}
\tag{4.4}
$$

によってパラメータ付けられる場合である．つまり, 線形化写像 $\varphi_{m,n}$ の指定する楕円函数解

$$
\begin{gathered}
u_{ij}(\varepsilon)=\frac{[\alpha_0+\varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]}{[\alpha_0+\varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]}\,\frac{[\alpha_0+\varepsilon_{i,j}][\varepsilon_{m,j}]}{[\alpha_0+\varepsilon_{m,j}][\varepsilon_{i,j}]}\\
(i=1,\ldots,m-1;\ j=m+2,\ldots,n)
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

によって, u 側の方程式の方は予め解いておいて, z 側の方程式に注目しようという意図である．(4.5) の楕円函数は

$$
u_{ij}(w(\varepsilon))=S^w_{ij}(u(\varepsilon))\qquad (w\in W_{m,n})
\tag{4.6}
$$

を満たすことに注意して, これを代入した $R^w_i(u(\varepsilon);z)$ を改めて $R^w_i(\varepsilon;z)$ と書こう．そうすると $z=(z_1,\ldots,z_{m-1})$ の方程式は

$$
w(z_i)=R^w_i(\varepsilon;z)\qquad (i=1,\ldots,m-1;\ w\in W_{m,n})
\tag{4.7}
$$

となる．この方程式を以下では, **(m,n) 型の楕円 Cremona 系** (あるいは $W_{m,n}$ 型の楕円 Cremona 系) と呼ぶ．その解とは函数の組 $z(\varepsilon)=(z_1(\varepsilon),\ldots,z_{m-1}(\varepsilon))$ で

$$
z_i(w(\varepsilon))=R^w_i(\varepsilon;z(\varepsilon))\qquad (i=1,\ldots,m-1;\ w\in W_{m,n})
\tag{4.8}
$$

を満たすものを言う．楕円 Cremona 系と呼んでいるが, 基準にとった函数 $[x]$ の周期格子 Ω の階数が 1, 0 の場合として「三角的」「有理的」な場合も含まれていることに注意しておこう．

$(m,n)=(3,9),(4,8),(6,9)$ のときには, Weyl 群 $W_{m,n}$ はそれぞれ $l=8,7,8$ の $E^{(1)}_l$ 型のアフィン Weyl 群であり,

$$
W_{m,n}=W(E^{(1)}_l)\xrightarrow{\sim}Q(E_l)\rtimes W(E_l)
\tag{4.9}
$$

のように, 階数 l のルート格子とそれに作用する E_l 型の有限 Weyl 群の半直積に分解する．その格子 $Q(E_l)$ から決まる可換な離散力学系を, 特に **(m,n) 型の離散 Painlevé 系**と呼ぼう．この意味の離散 Painlevé 系にも「楕円的」「三角的」「有理的」の 3 つのタイプがある訳

である. 以下では, 例によって主に楕円的な場合を想定して議論を進めるが, 特に断らない限りはこの 3 種類の区別は必要でない.

(m,n) 型楕円 Cremona 系を, Weyl 群 $W_{m,n}$ の表現のレベルで定式化すると次のようになる.

$$E_{m,n} = L_{m,n} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{C}/\Omega) \tag{4.10}$$

上の有理型函数全体のなす体を $\mathcal{M}(E_{m,n})$ で表すと, $W_{m,n}$ はこの体に自己同型群として作用する. その作用は, z 変数の有理函数体

$$\mathcal{M}(E_{m,n})(z_1,\ldots,z_{m-1}) \tag{4.11}$$

の自己同型群としての作用に拡張される. $n \geq m+2$ のとき, z_i $(i=1,\ldots,m-1)$ への単純鏡映 s_k $(k=0,\ldots,n-1)$ の作用は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
&k=0: && s_0(z_i) = \frac{1}{z_i} \\
&k=1,\ldots,m-2: && s_k(z_i) = z_{s_k(i)} \\
&k=m-1: && s_{m-1}(z_i) = \begin{cases} \dfrac{z_i}{z_{m-1}} & (i=1,\ldots,m-2) \\ \dfrac{1}{z_{m-1}} & (i=m) \end{cases} \\
&k=m: && s_m(z_i) = 1-z_i \\
&k=m+1: && s_{m+1}(z_i) = \frac{z_i}{u_{i,m+2}(\varepsilon)} \\
&k=m+2,\ldots,n-1: && s_k(z_i) = z_i
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ε 変数の函数が登場するのは, s_{m+1} の作用だけである. $u_{i,j}(\varepsilon)$ は, 線形化写像で決めたもの:

$$u_{ij}(\varepsilon) = \frac{[\alpha_0+\varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]}{[\alpha_0+\varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]}\,\frac{[\alpha_0+\varepsilon_{i,j}][\varepsilon_{m,j}]}{[\alpha_0+\varepsilon_{m,j}][\varepsilon_{i,j}]}. \tag{4.13}$$

なお, $n=m+1$ のときは, s_{m+1} の作用を

$$s_{m+1}(z_i) = \frac{1}{z_i} \qquad (i=1,\ldots,m-1) \tag{4.14}$$

に変更する.

定理 4.1 z 変数の有理函数体 $\mathcal{M}(E_{m,n})(z_1,\ldots,z_{m-1})$ の自己同型 $s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}$ を上記のように定義すると, これらは樹木 $T_{2,m,n-m}$ に付随する *Weyl* 群 $W_{m,n}$ の単純鏡映の基本関係を満たす.

この主張は, 構成法から従うことだが, $[x]$ の Riemann 関係式を用いて直接検証することも可能である. 定理の $W_{m,n}$ の作用を一般の $w \in W_{m,n}$ で書いたものが (m,n) 型楕円 Cremona 系 (4.7) に他ならない.

4.2　楕円 Cremona 系の標準解

線形化写像 $\varphi_{m,n}$ は, 一般な点 $\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\mathfrak{h}_{m,n}$ に対して, (適当な $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の楕円曲線を用いて) $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ 内の n 点配置 $\varphi_{m,n}(\varepsilon)=[p_1,\ldots,p_n]\in\mathbb{X}_{m,n}$ を対応させる写像であった. この構成法は $n=m+1,m+2,\ldots$ に対して整合的であって, 任意の $n>m$ に対して $W_{m,n}$ 共変な有理型写像の可換図式

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{m,n+1}: & \mathfrak{h}_{m,n+1} & \cdots\!\!\rightarrow & \mathbb{X}_{m,n+1} \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_{m,n}: & \mathfrak{h}_{m,n} & \cdots\!\!\rightarrow & \mathbb{X}_{m,n} \end{array} \tag{4.15}$$

が成立する. $\mathfrak{h}_{m,n+1}$ の点を $(\varepsilon;t)=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,t)$ $(t=\varepsilon_{n+1})$ と書くと, 有理型写像

$$\varphi_{m,n+1}\ :\ \mathfrak{h}_{m,n+1}=\mathfrak{h}_{m,n}\times\mathbb{C}\cdots\!\!\rightarrow\mathbb{X}_{m+1} \tag{4.16}$$

の $W_{m,n}$ 共変性は, これが (m,n) 型楕円 Cremona 系の, $t=\varepsilon_{n+1}$ をパラメータとする 1 パラメータの解であることを意味する. この解を, (m,n) 型楕円 Cremona 系の**標準解**と呼ぶ. 基礎とする楕円曲線を適切に選べば (例えば第 3.4 節で述べた 2 つの方法のうちどちらでもよい), $\varphi_{m,n+1}(\varepsilon;t)=[p_1,\ldots,p_n,q]\in\mathbb{X}_{m,n+1}$ の第 $n+1$ 番目の点 $q=p_{n+1}$ も他の n 点と同じ楕円曲線族上にある. 従って幾何学的には, 標準解とは「点 q が, Cremona 変換の参照する n 点配置 $[p_1,\ldots,p_n]$ と同一の楕円曲線上にある場合の点の動きを記述する解」である.

一般な $(\varepsilon;t)\in\mathfrak{h}_{m,n+1}$ に対応する $n{+}1$ 点の組を表す $m{\times}(n{+}1)$ 行列の $\mathrm{Grass}^*_{m,n+1}(\mathbb{C})$ での標準形を $Y(\varepsilon;t)$, $\mathbb{X}_{m,n+1}$ での標準形を $U(\varepsilon;t)$ と書くと, これらは, 楕円曲線 $C_{\lambda,\mu}\subset P^{m-1}(\mathbb{C})$ (但し $\lambda+\sum_{k=1}^{m}\mu_k=\varepsilon_0$ とする) の取り方に依らない. しかも, これらは n 点の場合の $m\times n$ 行列 $Y(\varepsilon)$, $U(\varepsilon)$ に新たに第 $n+1$ 列を付加えたものである. 明示的に書くと, $Y(\varepsilon;t)$, $U(\varepsilon;t)$ の第 $n+1$ 列の成分 $y^C_i(\varepsilon;t)=y_{i,n+1}(\varepsilon;t)$, $z^C_i(\varepsilon;t)=u_{i,n+1}(\varepsilon;t)$ は,

$$\begin{aligned} y^C_i(\varepsilon;t)&=\frac{[\alpha_0+\varepsilon_i-t]}{[\alpha_0]}\prod_{1\le k\le m;k\ne i}\frac{[\varepsilon_k-t]}{[\varepsilon_{k,i}]} && (i=1,\ldots,m),\\ z^C_i(\varepsilon;t)&=\frac{[\alpha_0+\varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]}{[\alpha_0+\varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]}\,\frac{[\alpha_0+\varepsilon_i-t][\varepsilon_m-t]}{[\alpha_0+\varepsilon_m-t][\varepsilon_i-t]} && (i=1,\ldots,m-1) \end{aligned} \tag{4.17}$$

である. つまり, この $m-1$ 個の有理型函数の組

$$z^C(\varepsilon;t)=(z^C_1(\varepsilon;t),\ldots,z^C_{m-1}(\varepsilon;t)) \tag{4.18}$$

が (m,n) 型楕円 Cremona 系の標準解 (t はパラメータ) であって, 任意の $w\in W_{m,n}$ に対して函数方程式

$$z^C_i(w(\varepsilon);t)=R^w_i(\varepsilon;z^C(\varepsilon;t))\qquad(i=1,\ldots,m-1) \tag{4.19}$$

を満たす.

命題 4.2 (4.17) で定義される $m-1$ 個の函数の組 $z^C(\varepsilon;t)=(z^C_1(\varepsilon;t),\ldots,z^C_{m-1}(\varepsilon;t))$ は, t をパラメータとして (m,n) 型楕円 *Cremona* 系の解の *1* パラメータ族を与える.

既に注意したように, 各 $z_i^C(\varepsilon;t)$ は, 変数 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ 及びパラメータ $t=\varepsilon_{n+1}$ の全てについて Ω 周期的である. ($z_i^C(\varepsilon;t)$ に付加した C は「楕円曲線 C 上の点に対応する解」という意味と canonical の 意味を兼ねる. そうしたければ, Riemann 関係式を使って, $z_i^C(\varepsilon;t)$ が前項で書下した $W_{m,n}$ の単純鏡映の作用と整合的であることを, 直接検証することも可能である.)

以下では, 第 3.4 節の第 2 の構成法で用いた m 個の函数を,

$$x_i^C(\varepsilon;t)=[\alpha_0+\varepsilon_i-t]\prod_{1\le k\le m;k\ne i}[\varepsilon_k-t]\quad(i=1,\ldots,m) \tag{4.20}$$

と表すことにしよう. この記号を用いると

$$y_i^C(\varepsilon;t)=\frac{x_i^C(\varepsilon;t)}{x_{i,i}(\varepsilon)},\qquad z_i^C(\varepsilon;t)=\frac{x_{m,m+1}(\varepsilon)}{x_{i,m+1}(\varepsilon)}\frac{x_i^C(\varepsilon;t)}{x_m^C(\varepsilon;t)} \tag{4.21}$$

と表されることに注意しよう. ここで $x_{i,j}(\varepsilon)=x_i^C(\varepsilon;\varepsilon_j)$ と記した. 即ち

$$x_{i,j}(\varepsilon)=[\alpha_0+\varepsilon_{i,j}]\prod_{1\le k\le m;k\ne i}[\varepsilon_{k,j}]\qquad(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n) \tag{4.22}$$

は, 楕円曲線 $C(\varepsilon)$ のパラメータ付けで見たときの第 j 番目の点 $p_j=p_\varepsilon(\varepsilon_j)$ の第 i 番目の同次座標である.

4.3 楕円 Cremona 系の τ 函数

第 2 節では, $W_{m,n}$ の作用を同次多項式 (線形系) のレベルに持上げる問題の予備的考察を行った. (m,n) 型楕円 Cremona 系は, Cremona 変換の参照する n 点配置への Weyl 群の作用を, 予め楕円函数を用いて線形化したものである. この楕円 Cremona 系の設定では, $W_{m,n}$ の作用を線形系のレベルに持上げることができる. そこで線形系を識別するために導入する変数 τ_j $(j=0,1,\ldots,n)$ が, (m,n) 型楕円 Cremona 系の「τ 函数」である.

第 2 節の議論と対比できるように記号を導入する. 以下では, 単純ルート

$$\begin{aligned}&\alpha_0=\varepsilon_{1,2,\ldots,m}=\varepsilon_0-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_m,\\&\alpha_j=\varepsilon_{j,j+1}=\varepsilon_j-\varepsilon_{j+1}\quad(j=1,\ldots,n-1)\end{aligned} \tag{4.23}$$

や, 一般の実ルート

$$\alpha\in\Delta_{m,n}^{\mathrm{Re}}=W_{m,n}\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\}\subset\mathfrak{h}_{m,n}^* \tag{4.24}$$

を $\mathfrak{h}_{m,n}$ 上の 1 次函数と見て $[x]$ に代入したもの $[\alpha]$ を考える必要がある. そこで, $\mathfrak{h}_{m,n}$ 上の有理型函数の体であって $[\alpha]$ $(\alpha\in\Delta_{m,n}^{\mathrm{Re}})$ から生成されるものを $\mathbb{K}$ を書く:

$$\mathbb{K}=\mathbb{C}([\alpha];\alpha\in\Delta_{m,n}^{\mathrm{Re}})\subset\mathcal{M}(\mathfrak{h}_{m,n}). \tag{4.25}$$

(楕円函数に限っていないことに注意.) (m,n) 型楕円 Cremona 系は, 変数 $z=(z_1,\dots,z_{m-1})$ の有理函数体 $\mathbb{K}(z)$ 上で $W_{m,n}$ を自己同型群として実現したものと見ることができる. $\mathbb{K}(z)$ は, 体 $\mathbb{K}$ 上の $m-1$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$ の有理函数体である.

この体を基礎にして, 第 2 節と同様に変数 $x=(x_1,\dots,x_m)$ の有理函数体 $\mathbb{K}(x)$ と形式的指数函数 τ^Λ $(\Lambda\in L_{m,n})$ を用いて, $\mathbb{K}$ 代数

$$\mathcal{R}=\bigoplus_{\Lambda\in L_{m,n}}\mathbb{K}(x)_{\deg(\Lambda)}\,\tau^\Lambda\subset\mathbb{K}(x)[L_{m,n}] \tag{4.26}$$

およびその部分代数

$$\mathcal{S}=\bigoplus_{\Lambda\in L_{m,n}}L(\Lambda)\,\tau^\Lambda\subset\mathcal{R}=\bigoplus_{\Lambda\in L_{m,n}}\mathbb{K}(x)_{\deg(\Lambda)}\,\tau^\Lambda \tag{4.27}$$

を考える. ここで,

$$\Lambda=de_0-\nu_1e_1-\cdots-\nu_ne_n\in L_{m,n}\qquad(d,\nu_1,\dots,\nu_n\in\mathbb{Z}) \tag{4.28}$$

に対して, 線形系 $L(\Lambda)$ は体 $\mathbb{K}$ に係数をもつ $x=(x_1,\dots,x_m)$ の d 次同次多項式 $f(x)$ であって, 条件

$$\mathrm{ord}_{p_j}f(x)\ge\nu_j\qquad(j=1,\dots,n) \tag{4.29}$$

を満たすものの全体とする. 参照する点 $p_1,\dots,p_n$ としては, 第 3.4 節の第 2 の構成法の楕円曲線 $C(\varepsilon)$ 上の n 点

$$p_j=(x_{1,j}(\varepsilon):\dots:x_{m,j}(\varepsilon))\in\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})\qquad(j=1,\dots,n) \tag{4.30}$$

を用いることにしよう. (特に $j=1,\dots,m$ に対しては $p_j=o_j$ である.) なお, Weyl 群の作用を考える上では, $x_i\tau_0$ $(i=1,\dots,m)$ 及び τ_j $(j=1,\dots,n)$ を変数とする $\mathbb{K}$ 係数の有理函数体

$$\mathcal{L}=\mathbb{K}(x_1\tau_0,\,\dots,\,x_m\tau_0;\,\tau_1,\,\dots,\,\tau_n) \tag{4.31}$$

が扱いやすい. 以下で $W_{m,n}$ の $\mathcal{L}$ への自己同型群としての作用を構成するが, 上の 2 つの部分環 $\mathcal{S}\subset\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$ はいずれも $W_{m,n}$ の作用で閉じる.

楕円曲線 $C(\varepsilon)$ 上のパラメータ付けを使って n 点 $p_1,\dots,p_n$ を指定したので, (4.21) を考慮して同次座標系の座標函数 x_i, Grassmann 多様体の座標函数 $y_i=y_{i,n+1}$, 配置空間の座標函数 $z_i=u_{i,n+1}$ の 3 者を次のように関連付ける:

$$\begin{aligned}
y_i&=\frac{x_i}{x_{i,i}(\varepsilon)}=\frac{x_i}{[\alpha_0]\prod_{1\le k\le m;k\ne i}[\varepsilon_{k,i}]} && (i=1,\dots,m),\\
z_i&=\frac{x_{m,m+1}(\varepsilon)}{x_{i,m+1}(\varepsilon)}\,\frac{x_i}{x_m}=\frac{[\alpha_0+\varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]}{[\alpha_0+\varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]}\,\frac{x_i}{x_m} && (i=1,\dots,m-1).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

この関係式によって ($\Lambda=0$ の成分の) $\mathbb{K}(x)_0$ を $\mathbb{K}(z)$ と同一視する. 以下やりたいことは, $\mathbb{K}(x)_0=\mathbb{K}(z)$ への Weyl 群 $W_{m,n}$ の作用を, 代数 $\mathcal{R}$ 全体に拡張することである. 実際には,

$s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ を体 $\mathbb{K}(x_1\tau_0, \ldots, x_m\tau_0; \tau_1, \ldots, \tau_n)$ の自己同型として定義しておいて, それらが $\mathcal{R}$ を保つことを確認する.

n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n = \langle s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle$ の作用をひとまず $\mathbb{K}(x)$ まで拡張する. 第 1 節の註釈 1.2 で述べた作用を $y_i = y_{i,n+1}$ $(i = 1, \ldots, m)$ について書くと

$$s_k(y_i) = y_{s_k(i)} \quad (k = 1, \ldots, m-1), \quad s_k(y_i) = y_i \quad (k = m+1, \ldots, n-1) \tag{4.33}$$

また,

$$s_m(y_i) = \begin{cases} y_i - \dfrac{y_{i,m+1}}{y_{m,m+1}} y_m & (i = 1, \ldots, m-1) \\ \dfrac{y_m}{y_{m,m+1}} & (i = m) \end{cases} \tag{4.34}$$

である. そこで, (4.32) に従って $y_i = x_i/x_{i,i}(\varepsilon)$, $y_{i,j} = x_{i,j}(\varepsilon)/x_{i,i}(\varepsilon)$ と置いて x_i への作用に書直すと, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の体 $\mathbb{K}(x)$ への自己同型群としての作用が得られる. それを具体的に書くと次のようになる. $k \neq m$ については, $i = 1, \ldots, m$ に対して

$$s_k(x_i) = x_{s_k(i)} \;\; (k = 1, \ldots, m-1), \qquad s_k(x_i) = x_i \;\; (k = m+1, \ldots, n-1) \tag{4.35}$$

$k = m$ のとき: $i = 1, \ldots, m-1$ に対しては

$$s_m(x_i) = \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]\, x_i - [\alpha_0 + \varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]\, x_m}{[\alpha_0][\varepsilon_{i,m}]}, \tag{4.36}$$

$i = m$ に対しては

$$s_m(x_m) = x_m. \tag{4.37}$$

τ 変数については, τ_0 は $\mathfrak{S}_n$ 不変とし, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ には $\mathfrak{S}_n$ を添字の置換で作用させる: $k = 1, \ldots, n-1$ に対して

$$s_k(\tau_0) = \tau_0, \qquad s_k(\tau_j) = \tau_{s_k(j)} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.38}$$

これで自然に $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{K}(x_1\tau_0, \ldots, x_m\tau_0; \tau_1, \ldots, \tau_n)$ への自己同型群としての作用が決まる.

標準 Cremona 変換 s_0 については, 次の作用で $\mathbb{K}(x_1\tau_0, \ldots, x_m\tau_0; \tau_1, \ldots, \tau_n)$ の自己同型を定義する.

$$\begin{aligned} s_0(\tau_i) &= \frac{x_i\,\tau_0}{\tau_1 \cdots \widehat{\tau_i} \cdots \tau_m} && (i = 1, \ldots, m), \\ s_0(\tau_j) &= \tau_j && (j = m+1, \ldots, n), \\ s_0(x_i\,\tau_0) &= \frac{x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_m\, \tau_0^{m-1}}{(\tau_1 \cdots \tau_m)^{m-2}} && (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4.39}$$

この定義から,

$$\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \cdots - \nu_n e_n \in L_{m,n} \quad (d, \nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{Z}) \tag{4.40}$$

のとき, 任意の $\varphi(\varepsilon; x) \in \mathbb{K}(x)_d$ に対して

$$s_0(\varphi(\varepsilon; x)\tau^{\Lambda}) = x_1^{d-\nu_1} \cdots x_m^{d-\nu_m}\, \varphi(s_0(\varepsilon); x^{-1})\tau^{s_0.\Lambda} \tag{4.41}$$

となることが従い, 第 2 節で考察した線形系での標準 Cremona 変換が再現される.

こうして得られた $\mathbb{K}(x_1\tau_0,\ldots,x_m\tau_0;\tau_1,\ldots,\tau_n)$ の自己同型 $s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}$ が部分代数 $\mathcal{R}$ を保つことは見易い.

定理 4.3 上記のように定義した

$$\mathcal{L}=\mathbb{K}(x_1\tau_0,\ldots,x_m\tau_0;\tau_1,\ldots,\tau_n) \tag{4.42}$$

の自己同型 $s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}$ は Weyl 群 $W_{m,n}$ の単純鏡映の基本関係を満たす. また, $\mathcal{L}$ の 2 つの部分 $\mathbb{K}$ 代数 $\mathcal{S}\subset\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$ はこの $W_{m,n}$ の作用で保たれる.

示すべきことは, 体 $\mathbb{K}(x_1\tau_0,\ldots,x_m\tau_0;\tau_1,\ldots,\tau_n)$ の自己同型として, s_0 が関係式

$$s_0^2=1,\quad s_0s_ms_0=s_ms_0s_m,\quad s_0s_j=s_js_0\quad(j=1,\ldots,n-1;j\neq m) \tag{4.43}$$

を満たすことである. これらの関係式は $s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}$ の定義に従って直接計算によって検証できる.

上記の Weyl 群 $W_{m,n}=\langle s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}\rangle$ の作用は, 標準解の場合に τ 函数 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ が

$$\tau_1^C(\varepsilon;t)=[\varepsilon_1-t],\quad\ldots,\quad\tau_n^C(\varepsilon;t)=[\varepsilon_n-t] \tag{4.44}$$

で与えられることを想定して構成したものである. このとき,

$$s_0(\tau_j^C(\varepsilon;t))=\begin{cases}[\alpha_0+\varepsilon_j-t] & (j=1,\ldots,n),\\ [\varepsilon_j-t] & (j=m+1,\ldots,n),\end{cases} \tag{4.45}$$

従って

$$\begin{aligned}x_i^C(\varepsilon;t)&=[\alpha_0+\varepsilon_i-t]\prod_{1\le k\le m;k\neq i}[\varepsilon_k-t]\\&=s_0(\tau_i^C(\varepsilon;t))\prod_{1\le k\le m;k\neq i}\tau_k^C(\varepsilon;t)\end{aligned} \tag{4.46}$$

となっている. ($t=\varepsilon_{n+1}$ は $W_{m,n}$ 不変なパラメータである.) τ_0 は x 変数の次数を数えるための形式的なパラメータと見なして

$$x_i\tau_0=x_i^C(\varepsilon;t)\quad(i=1,\ldots,m),\qquad\tau_j=\tau_j^C(\varepsilon;t)\quad(j=1,\ldots,n) \tag{4.47}$$

と読替えれば, 上の関係式は $x_i\tau_0=s_0(\tau_0)\tau_1\cdots\widehat{\tau_i}\cdots\tau_m$, 即ち

$$s_0(\tau_i)=\frac{x_i\tau_0}{\tau_1\cdots\widehat{\tau_i}\cdots\tau_m}\quad(i=1,\ldots,m) \tag{4.48}$$

を意味する. (他の関係式も同様である.) これを $\mathbb{K}$ 代数

$$\mathcal{R}=\bigoplus_{\Lambda\in L_{m,n}}\mathbb{K}(x)_{\deg(\Lambda)}\,\tau^{\Lambda} \tag{4.49}$$

の言葉で述べると, 一般な定数 $t\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\rho(x_i\tau_0) &= [\alpha_0+\varepsilon_i-t]\prod_{1\le k\le m;k\ne i}[\varepsilon_k-t] && (i=1,\ldots,m)\\ \rho(\tau_j) &= [\varepsilon_j-t] && (j=1,\ldots,n)\end{aligned}\tag{4.50}$$

で定義される $\mathbb{K}$ 代数の準同型写像 $\rho:\mathcal{R}\to\mathbb{K}$ が $W_{m,n}$ 共変ということである.

この $W_{m,n}$ 作用をもつ $\mathbb{K}$ 代数 $\mathcal{R}$ (または体 $\mathcal{L}$) を, $W_{m,n}$ 型楕円 Cremona 系の τ 函数を定義する代数と考えることができる. $W_{m,n}$ 共変な $\mathbb{K}$ 代数の準同型写像 $\rho:\mathcal{R}\to\mathcal{M}(\mathfrak{h}_{m,n})$ が与えられると, $\mathfrak{h}_{m,n}$ の有理型函数

$$\rho(x_i\tau_0)=x_i^\rho(\varepsilon)\quad(i=1,\ldots,m),\qquad \rho(\tau_j)=\tau_j^\rho(\varepsilon)\quad(j=1,\ldots,n)\tag{4.51}$$

について,

$$x_i^\rho(\varepsilon)=\tau_i^\rho(s_0(\varepsilon))\prod_{1\le k\le m;k\ne i}\tau_k^\rho(\varepsilon)\qquad(i=1,\ldots,m)\tag{4.52}$$

であり, これから $W_{m,n}$ 型楕円 Cremona 系の解

$$\begin{aligned}z_i^\rho(\varepsilon) &= \frac{x_{m,m+1}(\varepsilon)}{x_{i,m+1}(\varepsilon)}\frac{x_i^\rho(\varepsilon)}{x_m^\rho(\varepsilon)}\\ &= \frac{x_{m,m+1}(\varepsilon)}{x_{i,m+1}(\varepsilon)}\frac{\tau_i^\rho(s_0(\varepsilon))\,\tau_m^\rho(\varepsilon)}{\tau_m^\rho(s_0(\varepsilon))\,\tau_i^\rho(\varepsilon)}\qquad(i=1,\ldots,m-1)\end{aligned}\tag{4.53}$$

が, τ 函数の比として与えられることになる.

体 $\mathcal{L}=\mathbb{K}(x_1\tau_0,\ldots,x_m\tau_0;\tau_1,\ldots,\tau_n)$ の生成元として $x_i\tau_0$ の替わりに

$$f_i=x_i\tau^{h_0}=\frac{x_i\tau_0}{\tau_1\cdots\tau_m}\qquad(i=1,\ldots,m)\tag{4.54}$$

を用いる方が便利なこともある.

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}=\mathbb{K}(f_1,\ldots,f_m;\tau_1,\ldots,\tau_n),\\ &\mathcal{R}=S[\tau_1^{\pm1},\ldots,\tau_n^{\pm1}],\qquad S=\textstyle\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}f_m^d\,\mathbb{K}(f_1/f_m,\ldots,f_{m-1}/f_m)\end{aligned}\tag{4.55}$$

と見なして, Weyl 群 $W_{m,n}=\langle s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}\rangle$ の作用を書下すと次のようになる. s_0 の作用は

$$s_0(\tau_j)=\begin{cases}\tau_j\,f_j & (j=1,\ldots,m)\\ \tau_j & (j=m+1,\ldots,n)\end{cases}\qquad s_0(f_i)=\frac{1}{f_i}\quad(i=1,\ldots,m).\tag{4.56}$$

s_k $(k=1,\ldots,n-1)$ の作用は, τ 函数については

$$s_k(\tau_j)=\tau_{s_k(j)}\qquad(j=1,\ldots,n).\tag{4.57}$$

f 変数については, 各 $i=1,\ldots,m$ に対して

$$s_k(f_i)=f_{s_k(i)}\quad(k=1,\ldots,m-1),\qquad s_k(f_i)=f_i\quad(k=m+1,\ldots,n-1).\tag{4.58}$$

s_m だけが非自明な作用になっていて,

$$
\begin{aligned}
s_m(f_i) &= \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} \frac{[\alpha_0+\varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]f_i - [\alpha_0+\varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]f_m}{[\alpha_0][\varepsilon_{i,m}]} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,\ldots,m-1) \qquad (4.59)\\
s_m(f_m) &= \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} f_m
\end{aligned}
$$

である.

なお, 標準解の場合の f 変数は

$$
f_i^C(\varepsilon;t) = \frac{[\alpha_0+\varepsilon_i-t]}{[\varepsilon_i-t]} \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{4.60}
$$

で与えられる.

4.4 格子の τ 函数と τ コサイクル

前項では, (m,n) 型楕円 Cremona 系の τ 函数を記述する $\mathbb{K}$ 代数

$$
\mathcal{S} = \bigoplus_{\Lambda\in L_{m,n}} L(\Lambda)\,\tau^{\Lambda} \subset \mathcal{R} = \bigoplus_{\Lambda\in L_{m,n}} \mathbb{K}(x)_{\deg(\Lambda)}\,\tau^{\Lambda} \tag{4.61}
$$

を導入した. この項では, τ 函数 τ_j $(j=1,\ldots,n)$ の Weyl 群による変換の全体を合理的に記述するための枠組みとして, 「格子の τ 函数」を導入する.

まず $\mathbb{K}$ 代数 $\mathcal{S}$ においては, $\tau_1,\ldots,\tau_n$ の属する成分が $\mathbb{K}$ 上 1 次元となっていることに注意しよう:

$$
L(e_j)\,\tau^{e_j} = \mathbb{K}[x]_0\,\tau^{e_j} = \mathbb{K}\,\tau_j \qquad (j=1,\ldots,n). \tag{4.62}
$$

そこで n 次元部分空間

$$
V = \mathbb{K}\tau_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{K}\tau_n = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]\tau_n \tag{4.63}
$$

から生成される $\mathbb{K}[W_{m,n}]$ 加群

$$
\mathcal{V} = \mathbb{K}[W_{m,n}]\,V = \mathbb{K}[W_{m,n}]\,\tau_n \subset \mathcal{S} \tag{4.64}
$$

を考察する. ($\mathbb{K}[W_{m,n}]$ は, $W_{m,n}$ の $\mathbb{K}$ への作用に関する接合積 $\mathbb{K}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[W_{m,n}]$ の意味である.) 各 $w\in W_{m,n}$ は $\mathbb{C}$ 同型

$$
w:\quad L(e_n)\,\tau_n \xrightarrow{\sim} L(w.e_n)\,\tau^{w.e_n} \tag{4.65}
$$

を誘導し, $\dim_{\mathbb{K}} L(w.e_n)=1$ となる. 従って, 格子 $L_{m,n}=\mathbb{Z}e_0\oplus\mathbb{Z}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}e_n$ 内の $W_{m,n}$ 軌道

$$
M_{m,n} = W_{m,n}e_n = W_{m,n}\{e_1,\ldots,e_n\} \subset L_{m,n} \tag{4.66}
$$

の上では, $\dim_{\mathbb{L}} L(\Lambda)=1$ $(\Lambda\in M_{m,n})$ となる:

$$
\mathcal{V} = \bigoplus_{\Lambda\in M_{m,n}} L(\Lambda)\tau^{\Lambda}, \qquad \dim_{\mathbb{K}} L(\Lambda)=1 \quad (\Lambda\in M_{m,n}). \tag{4.67}
$$

ここで, 次の事実に注意する.

補題 4.4 e_n における固定化群は $W_{m,n-1}=\langle s_0,s_1,\ldots,s_{n-2}\rangle$ に等しい. 即ち $w\in W_{m,n}$ のとき, $w.e_n=e_n$ となるのは $w\in W_{m,n-1}$ のときに限る.

この補題はルート系の一般論からの帰結である. $\tau_n\in\mathcal{S}$ への Weyl 群の作用についても

$$s_0(\tau_n)=\tau_n,\qquad s_k(\tau_n)=\tau_n\quad(k=1,\ldots,n-2).\tag{4.68}$$

即ち τ_n は $W_{m,n-1}$ 不変である. このことから, $\Lambda\in M_{m,n}$ に対して, $w\in W_{m,n}$ で $w.e_n=\Lambda$ となる w をとり

$$\tau(\Lambda)=w.\tau_n\in L(\Lambda)\tau^{\Lambda}\tag{4.69}$$

とおくと, この $\tau(\Lambda)$ は w の取り方によらないことが分かる. 従って

命題 4.5 $M_{m,n}$ で添字づけられた $\mathcal{L}$ の元の族 $(\tau(\Lambda))_{\Lambda\in M_{m,n}}$ で次の条件を満たすものが一意に定まる:

$$\tau(e_j)=\tau_j\qquad(j=1,\ldots,n),\quad w(\tau(\Lambda))=\tau(w.\Lambda)\quad(\Lambda\in M_{m,n};\ w\in W_{m,n}).\tag{4.70}$$

更に, この $(\tau(\Lambda))_{\Lambda\in M_{m,n}}$ は $\mathbb{K}[W_{m,n}]$ 加群 $\mathcal{V}=\mathbb{K}[W_{m,n}]V$ の $\mathbb{K}$ 基底をなす:

$$\mathcal{V}=\bigoplus_{\Lambda\in M_{m,n}}\mathbb{K}\,\tau(\Lambda).\tag{4.71}$$

$\Lambda\in M_{m,n}$ のとき $\tau(\Lambda)\in L(\Lambda)\tau^{\Lambda}$ は

$$\tau(\Lambda)=\phi(\Lambda;x)\,\tau^{\Lambda},\qquad \phi(\Lambda;x)\in L(\Lambda)\tag{4.72}$$

と表示される. $\Lambda=de_0-\nu_1e_1-\ldots-\nu_ne_n$ と書けば, この $\phi(\Lambda;x)$ は次数 $d=\deg(\Lambda)$ の 0 でない同次多項式で, 楕円曲線上の点 $p_1,\ldots,p_n\in C(\varepsilon)$ における零点の位数について

$$\mathrm{ord}_{p_j}\phi(\Lambda;x)\geq\nu_j\qquad(j=1,\ldots,n)\tag{4.73}$$

なる性質を持つ多項式である. この性質を持つ多項式が $\mathbb{K}^*$ の元の乗法を除いて一意に決まることは第 2 節の議論で分かっていた訳だが, それを $W_{m,n}$ の τ 函数への作用を用いて規格化した訳である.

同次多項式の族 $(\phi(\Lambda;x))_{\Lambda\in M_{m,n}}$ を (m,n) 型楕円 Cremona 系の $\boldsymbol{\tau}$ **コサイクル**と呼び, 個々の多項式 $\phi(\Lambda;x)$ を $\boldsymbol{\phi}$ **因子**と呼ぶ. この同次多項式の族は, 初期条件

$$\phi(e_j;x)=1\qquad(j=1,\ldots,n)\tag{4.74}$$

と, 各 $\Lambda=de_0-\nu_1e_1-\cdots-\nu_ne_n\in M_{m,n}$ での帰納的構成の条件

$$\begin{aligned}\phi(s_0.\Lambda;x)&=x_1^{d-\nu_1}\cdots x_m^{d-\nu_m}\,{}^{s_0}\phi(\Lambda;x^{-1})\\ \phi(s_k.\Lambda;x)&={}^{s_k}\phi(\Lambda;s_k(x))\qquad(k=1,\ldots,n-1)\end{aligned}\tag{4.75}$$

で特徴づけられる. ここで, ${}^{w}\varphi(x)$ は, 多項式 $\varphi(x)$ の係数に w を作用させたものを表す.

配置空間の座標は

$$z_i = \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]}{[\alpha_0 + \varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]}\,\frac{x_i}{x_m} = \frac{[s_0(\varepsilon_{m,m+1})][\varepsilon_{i,m+1}]}{[s_0(\varepsilon_{i,m+1})][\varepsilon_{m,m+1}]}\,\frac{x_i\tau^{h_0}}{x_m\tau^{h_0}} \tag{4.76}$$

だったから, 任意の $w \in W_{m,n}$ に対して

$$\begin{aligned}&(w(z_1) : \ldots : w(z_{m-1}) : 1)\\ &= \left(\frac{[w(\varepsilon_{1,m+1})]}{[ws_0(\varepsilon_{1,m+1})]}w(x_1\tau^{h_0}) : \ldots : \frac{[w(\varepsilon_{m,m+1})]}{[ws_0(\varepsilon_{m,m+1})]}w(x_m\tau^{h_0})\right).\end{aligned} \tag{4.77}$$

ここで, $x_i\,\tau^{h_0} = \dfrac{s_0(\tau_i)}{\tau_i}$ を用いると

$$w(x_i\tau^{h_0}) = \frac{ws_0(\tau_i)}{w(\tau_i)} = \frac{\phi(ws_0.e_i; x)\tau^{ws_0.e_i}}{\phi(w.e_i; x)\tau^{w.e_i}} = \frac{\phi(ws_0.e_i; x)}{\phi(w.e_i; x)}\tau^{w.h_0}. \tag{4.78}$$

従って,

命題 4.6 任意の $w \in W_{m,n}$ に対して, w の z_i $(i = 1, \ldots, m-1)$ への作用は, τ コサイクルを用いて, 以下のように表される :

$$\begin{aligned}&(w(z_1) : \ldots : w(z_{m-1}) : 1)\\ &= \left(\frac{[w(\varepsilon_{1,m+1})]}{[ws_0(\varepsilon_{1,m+1})]}\,\frac{\phi(ws_0.e_1; x)}{\phi(w.e_1; x)} : \ldots : \frac{[w(\varepsilon_{m,m+1})]}{[ws_0(\varepsilon_{m,m+1})]}\,\frac{\phi(ws_0.e_m; x)}{\phi(w.e_m; x)}\right)\end{aligned} \tag{4.79}$$

つまり, Cremona 変換による一般の点 $q \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の動きは, τ コサイクルによって完全に記述できる訳である.

f 変数 $f_i = x_i\tau^{h_0}$ を重視する場合には, 上記の $w(x_i\tau^{h_0})$ の表示 (4.78) を書直して次の形にまとめておくと都合が良い.

命題 4.7 変数 $f_i = x_i\tau_0$ $(i = 1, \ldots, m)$ と τ_j $(j = 1, \ldots, n)$ に対する $w \in W_{m,n}$ の作用は, ϕ 因子を用いて, 次のように書き表すことができる.

$$\begin{aligned} w(f_i) &= \tau^{w.h_0 - \deg(w.h_0)h_0}\,\frac{\phi(ws_0.e_i; f)}{\phi(w.e_i; f)} \qquad && (i = 1, \ldots, m),\\ w(\tau_j) &= \tau^{w.e_j - \deg(w.e_j)h_0}\,\phi(w.e_j; f) && (j = 1, \ldots, n).\end{aligned} \tag{4.80}$$

なお, $\phi(\Lambda; x)$ の定義式

$$\phi(\Lambda; x) = \frac{\tau(\Lambda)}{\tau^{\Lambda}} \tag{4.81}$$

において, $\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \ldots - \nu_n e_n \in M_{m,n}$ とし, $\Lambda = w.e_n$ なる $w \in W_{m,n}$ をとれば

$$\phi(\Lambda; x\tau_0) = w(\tau_n)\,\tau_1^{\nu_1}\cdots\tau_n^{\nu_n}. \tag{4.82}$$

標準解の場合に, $x_i\tau_0 = x_i^C(\varepsilon;t)$ を代入すると,

$$\begin{gathered}\phi(\Lambda;x^C(\varepsilon;t)) = [\lambda-t][\varepsilon_1-t]^{\nu_1}\cdots[\varepsilon_n-t]^{\nu_n}\\ \lambda = d\varepsilon_0-\nu_1\varepsilon_1-\cdots-\nu_n\varepsilon_n\end{gathered} \tag{4.83}$$

を得る. これを $\phi^C(\Lambda;t)$ と書けば, これは, t に関する擬周期函数であって, $\Lambda \neq e_k$ $(k = 1,\ldots,n)$ ならば, $t=\varepsilon_j$ における位数は丁度 ν_j となっている. (左辺は t について正則だから, $\Lambda \in M_{m,n}$ で $\nu_j<0$ なる係数が現れるのは, $d=0$, $\Lambda=e_k$ $(k=1,\ldots,n)$ のときに限る. それ以外のときは, $\nu_j \geq 0$ $(j=1,\ldots,n)$ となっている.)

4.5 格子の τ 函数と双線形方程式

$\mathcal{R}$ の元 $x_i\tau_0$, f_i はそれぞれ

$$x_i\tau_0 = s_0(\tau_i)\prod_{1\leq k\leq m;k\neq i}\tau_k, \qquad f_i=\frac{s_0(\tau_i)}{\tau_i} \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{4.84}$$

で表される. $x_i\tau_0$ または f_i への s_m の作用から

$$\begin{aligned}&[\alpha_0][\varepsilon_{i,m}]s_m s_0(\tau_i)\,\tau_{m+1}\\ &=[\alpha_0+\varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]s_0(\tau_i)\,\tau_m-[\alpha_0+\varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]s_0(\tau_m)\,\tau_i.\end{aligned} \tag{4.85}$$

これを格子の τ 函数 $\tau(\Lambda)$ の記号で書けば,

$$\begin{aligned}&[\alpha_0][\varepsilon_{i,m}]\tau(e_0-e_1-\cdots-\widehat{e_i}-\cdots-e_{m-1}-e_{m+1})\,\tau(e_{m+1})\\ &=[\alpha_0+\varepsilon_{m,m+1}][\varepsilon_{i,m+1}]\tau(e_0-e_1-\cdots-\widehat{e_i}-\cdots-e_{m-1}-e_m)\,\tau(e_m)\\ &\quad-[\alpha_0+\varepsilon_{i,m+1}][\varepsilon_{m,m+1}]\tau(e_0-e_1-\cdots-e_{m-1})\,\tau(e_i)\end{aligned} \tag{4.86}$$

となる. 更に添字に関する対称性から ($\mathfrak{S}_n$ の作用によって), 次の関係式を得る: 相異なる添字 $l_1,\ldots,l_{m-2},i,j,k\in\{1,\ldots,n\}$ に対して

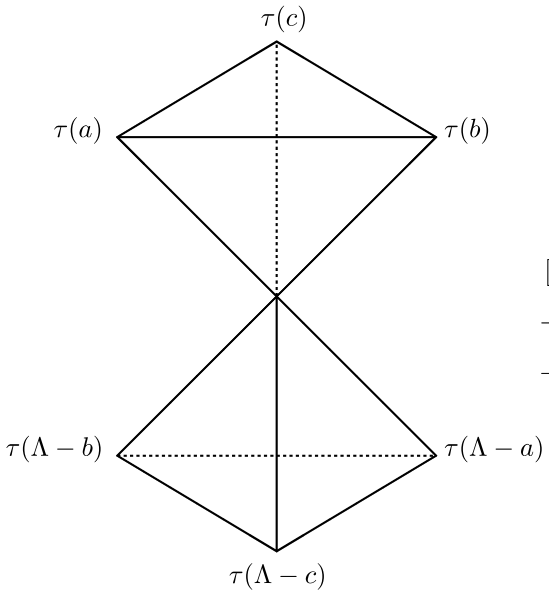
$$\Lambda = e_0-e_{l_1}-\cdots-e_{l_{m-2}}, \qquad \lambda=\varepsilon_0-\varepsilon_{l_1}-\cdots-\varepsilon_{l_{m-2}}, \tag{4.87}$$

とおくと

$$\begin{aligned}&[\lambda-\varepsilon_i-\varepsilon_j][\varepsilon_{i,j}]\tau(\Lambda-e_k)\,\tau(e_k)\\ &=[\lambda-\varepsilon_i-\varepsilon_k][\varepsilon_{i,k}]\tau(\Lambda-e_j)\,\tau(e_j)-[\lambda-\varepsilon_j-\varepsilon_k][\varepsilon_{j,k}]\tau(\Lambda-e_i)\,\tau(e_i).\end{aligned} \tag{4.88}$$

定理 4.8 命題 *4.5* の τ 函数の族 $(\tau(\Lambda))_{\Lambda\in M_{m,n}}$ は, 次の広田・三輪型双線形関係式を満たす: 相異なる添字 $l_1,\ldots,l_{m-2},i,j,k\in\{1,\ldots,n\}$ に対して

$$\begin{gathered}[\varepsilon_{j,k}][\lambda-\varepsilon_j-\varepsilon_k]\tau(e_i)\,\tau(\Lambda-e_i)+[\varepsilon_{k,i}][\lambda-\varepsilon_k-\varepsilon_i]\tau(e_j)\,\tau(\Lambda-e_j)\\ +[\varepsilon_{i,j}][\lambda-\varepsilon_i-\varepsilon_j]\tau(e_k)\,\tau(\Lambda-e_k)=0\\ (\Lambda=e_0-e_{l_1}-\cdots-e_{l_{m-2}},\quad \lambda=\varepsilon_0-\varepsilon_{l_1}-\cdots-\varepsilon_{l_{m-2}}).\end{gathered} \tag{4.89}$$



$$\begin{aligned}&[\beta-\gamma][\lambda-\beta-\gamma]\ \tau(a)\tau(\Lambda-a)\\&+[\gamma-\alpha][\lambda-\gamma-\alpha]\ \tau(b)\tau(\Lambda-b)\\&+[\alpha-\beta][\lambda-\alpha-\beta]\ \tau(c)\tau(\Lambda-c)=0\end{aligned}$$

図 1: 広田・三輪型の双線形関係式

この過程を逆に辿れば, 双線形方程式系からもとの f 変数のレベルの Weyl 群の表現が再現される. 今, Weyl 群 $W_{m,n}$ の作用を許容するような τ 函数の族 $(\tau(\Lambda))_{\Lambda\in M_{m,n}}$ で次の条件を満たすもの与えられたとする.

(1) $W_{m,n}$ の τ 函数への作用と, 格子点の集合 $M_{m,n}$ への作用への整合性:

$$w(\tau(\Lambda))=\tau(w.\Lambda)\qquad(\Lambda\in M_{m,n};w\in W_{m,n}).\tag{4.90}$$

(2) 広田・三輪型双線形関係式: 相異なる添字 $l_1,\dots,l_{m-2},i,j,k\in\{1,\dots,n\}$ に対して

$$\begin{gathered}[\lambda-\varepsilon_j-\varepsilon_k][\varepsilon_{j,k}]\tau(\Lambda-e_i)\,\tau(e_i)+[\lambda-\varepsilon_k-\varepsilon_i][\varepsilon_{k,i}]\tau(\Lambda-e_j)\,\tau(e_j)\\+[\lambda-\varepsilon_i-\varepsilon_j][\varepsilon_{i,j}]\tau(\Lambda-e_k)\,\tau(e_k)=0\\(\Lambda=e_0-e_{l_1}-\cdots-e_{l_{m-2}},\quad\lambda=\varepsilon_0-\varepsilon_{l_1}-\cdots-\varepsilon_{l_{m-2}}).\end{gathered}\tag{4.91}$$

(形式的には $\tau(\Lambda)$ を, $W_{m,n}$ が自己同型群として作用するような $\mathbb{K}$ 代数の元と考える.) 条件 (1), (2) の下で, 全ての $\tau(\Lambda)$ が 0 でない (可逆元) ならば,

$$\tau_j=\tau(e_j)\quad(j=1,\dots,n),\qquad f_i=\frac{\tau(h_0+e_i)}{\tau(e_i)}\quad(i=1,\dots,m)\tag{4.92}$$

とおくことで, $\mathbb{K}$ 代数 $\mathcal{R}$ への $W_{m,n}$ の作用が再現される.

上記の条件 (1), (2) を満たす τ 函数の族 $(\tau(\Lambda))_{\Lambda\in M_{m,n}}$ を, (m,n) 型の格子の τ 函数系と呼ぶ. 上の注意は, 一般な状況では, f 変数 $f_1,\dots,f_m$ と τ 函数 $\tau_1,\dots,\tau_n$ による楕円 Cremona 系の表現と, 格子の τ 函数系 $(\tau(\Lambda))_{\Lambda\in M_{m,n}}$ とが等価な対象であることを意味する.

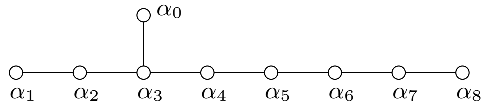
5　楕円差分 Painlevé 方程式 — $W_{3,9}$ 型離散 Painlevé 系

この節以降では, 特に $(m,n)=(3,9)$ の場合, つまり射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある 9 点の配置に付随する楕円 Cremona 系を考察する.

5.1　$E_8^{(1)}$ 型アフィンルート系

$(m,n)=(3,9)$ の場合の樹木 $T_{2,3,6}$ に付随するルート系は $E_8^{(1)}$ 型のアフィンルート系である.

$E_8^{(1)}$:



(5.1)

まず $E_8^{(1)}$ 型ルート系に関する記号を整理しておこう. 我々の実現

$$\mathfrak{h}_{3,9}^* = \mathbb{C}\varepsilon_0 \oplus \mathbb{C}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\varepsilon_9 \tag{5.2}$$

では, $\mathfrak{h}_{3,9}^*$ 上の対称 2 次形式を

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0\,|\,\varepsilon_0) = -1, &\qquad (\varepsilon_j\,|\,\varepsilon_j) = 1 \quad (j=1,\ldots,9), \\ (\varepsilon_i\,|\,\varepsilon_j) = 0 &\qquad (i,j=0,1,\ldots,9;\ i\neq j) \end{aligned} \tag{5.3}$$

で定義した. 単純ルートは

$$\alpha_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\quad \alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\quad \ldots,\quad \alpha_8 = \varepsilon_8 - \varepsilon_9 \in \mathfrak{h}_{3,9}^* \tag{5.4}$$

で, ルート格子 (単純ルートの生成する $\mathbb{Z}$ 加群) を

$$Q_{3,9} = Q(E_8^{(1)}) = \mathbb{Z}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_8 \tag{5.5}$$

で表す. また

$$\begin{aligned} \delta &= 3\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_9 \\ &= 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8 \end{aligned} \tag{5.6}$$

とおくと, $\mathbb{C}\delta$ と

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} Q_{3,9} = \mathbb{C}\alpha_0 \oplus \mathbb{C}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\alpha_8 \subset \mathfrak{h}_{3,9}^* \tag{5.7}$$

は, $\mathfrak{h}_{3,9}^*$ おいて互いに他の直交補空間となる. この δ を**零ルート** (null root) と呼ぶ. 差分方程式の文脈では, δ は差分間隔を表すパラメータとなる. 以下では $i,j,k\in\{1,\ldots,9\}$ に対して, 略記法

$$\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_i - \varepsilon_j,\qquad \varepsilon_{i,j,k} = \varepsilon_0 - \varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k \tag{5.8}$$

を用いる. この記号で, 単純ルートは

$$\alpha_0 = \varepsilon_{123},\quad \alpha_1 = \varepsilon_{12},\quad \ldots,\quad \alpha_8 = \varepsilon_{89} \tag{5.9}$$

と表される.

Weyl 群 $W_{3,9} = W(E_8^{(1)}) = \langle s_0, s_1, \ldots, s_8 \rangle$ は, $\mathfrak{h}_{3,9}^*$ 上の直交変換 (2 次形式 $(\,|\,)$ を不変に保つ線形変換) の群であって, 次の単純鏡映 s_k $(k = 0, 1, \ldots, 8)$ で生成される.

$$s_k(\lambda) = \lambda - (\alpha_k \,|\, \lambda)\, \alpha_k \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}_{3,9}^*). \tag{5.10}$$

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_9$ への作用は, s_0 については

$$\begin{aligned} &s_0(\varepsilon_0) = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ &s_0(\varepsilon_1) = \varepsilon_0 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad s_0(\varepsilon_2) = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad s_0(\varepsilon_3) = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ &s_0(\varepsilon_j) = \varepsilon_j \qquad (j = 4, \ldots, 9) \end{aligned} \tag{5.11}$$

s_k $(k = 1, \ldots, 8)$ については

$$s_k(\varepsilon_0) = \varepsilon_0, \qquad s_k(\varepsilon_j) = \varepsilon_{s_k(j)} \quad (j = 1, \ldots, 9) \tag{5.12}$$

で与えられる. また, 単純鏡映の基本関係は次で与えられる.

$$\begin{aligned} &s_j^2 = 1 && (j = 0, 1, \ldots, 8) \\ &s_i s_j = s_j s_i && (i, j \in \{1, \ldots, 8\}; |i - j| \geq 2), \\ &s_i s_j s_i = s_j s_i s_j && (i, j \in \{1, \ldots, 8\}; |i - j| = 1) \\ &s_0 s_j = s_j s_0 && (j \in \{1, \ldots, 8\}; j \neq 3) \\ &s_0 s_3 s_0 = s_3 s_0 s_3 && \end{aligned} \tag{5.13}$$

零ルート δ は全ての単純ルートと直交するので, $W_{3,9}$ の作用で不変である.

単純ルートから Weyl 群の作用で生成される 1 次函数を**実ルート** (real root) という. この場合の実ルート全体の集合

$$\Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}} = W_{3,6}\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_8\} \subset Q_{3,9} \tag{5.14}$$

は,

$$\begin{aligned} \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}} = \{\ &\pm\varepsilon_{ij} \pm n\delta \mid 1 \leq i < j \leq 9, n \in \mathbb{Z}\} \\ \cup\{\ &\pm\varepsilon_{ijk} \pm n\delta \mid 1 \leq i < j < k \leq 9, n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned} \tag{5.15}$$

で与えられる. $\alpha \in \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}}$ を実ルートとすると $(\alpha \,|\, \alpha) = 2$ なので, α に関する鏡映 s_α は

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\alpha \,|\, \lambda)\, \alpha \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}_{3,9}^*) \tag{5.16}$$

で定義される. この種の鏡映は, Weyl 群の作用と両立する. つまり, 任意の $\alpha \in \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}}$ と $w \in W_{3,9}$ に対して $w s_\alpha = s_{w(\alpha)} w$ が成立する.

なお E_8 型の有限ルート系を, α_8 を除外して, 単純ルート $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_7$ で指定する:

$$Q_{3,8} = Q(E_8) = \mathbb{Z}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_7 \subset Q_{3,9} = Q(E_8^{(1)}). \tag{5.17}$$

対応する Weyl 群は

$$W_{3,8} = W(E_8) = \langle s_0, s_1, \ldots, s_7 \rangle \subset W_{3,9} = W(E_8^{(1)}). \tag{5.18}$$

この実現での E_8 型の正ルートの集合 $\Delta^+_{3,8} = \Delta^+(E_8)$ (120 個の元からなる) は次のように 4 つにグループ分けできる:

$$
\begin{array}{llll}
(0) & \varepsilon_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j & (1 \le i < j \le 8) & \binom{8}{2} = 28 \\
(1) & \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_0 - \varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k & (1 \le i < j < k \le 8) & \binom{8}{3} = 56 \\
(2) & \delta - \varepsilon_{ij9} = \delta - \varepsilon_0 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_9 & (1 \le i < j \le 8) & \binom{8}{2} = 28 \\
(3) & \delta - \varepsilon_{i9} = \delta - \varepsilon_i + \varepsilon_9 & (1 \le i \le 8) & \binom{8}{1} = 8
\end{array}
\tag{5.19}
$$

ここで,

$$\delta - \alpha_8 = \delta - \varepsilon_{89} \in \Delta^+_{3,8} \tag{5.20}$$

が, E_8 型ルート系の最高ルートである. なお, $\Delta_{3,8} = \Delta^+_{3,8} \cup (-\Delta^+_{3,8})$ が E_8 型のルート全体の集合で, これは 240 個の元からなる.

以下の議論では, $\mathfrak{h}^*_{3,9}$ の元は線形空間 $\mathfrak{h}_{3,9}$ 上の 1 次函数と見なす. 点集合としての格子を考察したいときには

$$L_{3,9} = \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_9 \subset \mathfrak{h}_{3,9} \tag{5.21}$$

の方を用いる. α_j, $\varepsilon_{i,j}$, $\varepsilon_{i,j,k}$ に対応する $\mathfrak{h}_{3,9}$ の元を, それぞれ

$$
\begin{array}{l}
h_0 = e_0 - e_1 - e_2 - e_3, \quad h_1 = e_1 - e_2, \quad \ldots, \quad h_8 = e_8 - e_9 \\
e_{ij} = e_i - e_j, \qquad e_{ijk} = e_0 - e_i - e_j - e_k
\end{array}
\tag{5.22}
$$

で表す. δ に対応する元は

$$c = 3e_0 - e_1 - \cdots - e_9 \tag{5.23}$$

で表す. アフィン Lie 環の文脈では, $c \in \mathfrak{h}_{3,9}$ は標準中心元と呼ばれる.

5.2 $W_{3,9} = W(E_8^{(1)})$ の平行移動

Weyl 群 $W_{3,9} = W(E_8^{(1)}) = \langle s_0, s_1, \ldots, s_8 \rangle$ は, E_8 型のルート格子 $Q(E_8)$ と有限 Weyl 群 $W(E_8)$ の半直積に分解することが知られている:

$$Q(E_8) \rtimes W(E_8) \xrightarrow{\sim} W(E_8^{(1)}). \tag{5.24}$$

以下において, この分解を詳しく見ておく.

$\alpha \in \mathfrak{h}^*_{3,9}$ で条件 $(\delta \,|\, \alpha) = 0$ を満たすものに対して, $\mathfrak{h}^*_{3,9}$ における「平行移動」T_α を次の $\mathbb{C}$ 線形変換として定義する:

$$T_\alpha(\lambda) = \lambda + (\delta \,|\, \lambda)\alpha - \left(\frac{1}{2}(\alpha \,|\, \alpha)(\delta \,|\, \lambda) + (\alpha \,|\, \lambda) \right) \delta \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*_{3,9}). \tag{5.25}$$

$(\delta \,|\, \alpha) = 0$ なる α に限定すれば, 対応 $\alpha \mapsto T_\alpha$ は加法的であることが知られている. ($\mathbb{C}$ 線形ではない.)

補題 5.1 (1) $\alpha \in \mathfrak{h}_{3,9}^*$, $(\delta \,|\, \alpha) = (\alpha \,|\, \alpha) = 0$ とすると $\alpha = k\delta$ $(k \in \mathbb{C})$ であって $T_\alpha = T_{k\delta} = 1$.
(2) $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}_{3,9}^*$, $(\delta \,|\, \alpha) = (\delta \,|\, \beta) = 0$ とすると, $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha = T_{\alpha+\beta}$.
(3) $\alpha \in \mathfrak{h}_{3,9}^*$, $(\delta \,|\, \alpha) = 0$ とすると, 任意の $w \in W_{3,9}$ に対して, $w\,T_\alpha = T_{w(\alpha)}\,w$.

$(\delta \,|\, \lambda) = 0$ のとき, 特に $\lambda \in \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}}$ のときは, T_α は δ のスカラー倍のシフトとして働く:

$$T_\alpha(\lambda) = \lambda - (\alpha \,|\, \lambda)\,\delta. \tag{5.26}$$

$\alpha \in \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}}$ が実ルートのときには, $(\alpha \,|\, \alpha) = 2$ なので

$$T_\alpha(\lambda) = \lambda + (\delta \,|\, \lambda)\,\alpha - (\alpha + \delta \,|\, \lambda)\,\delta \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}_{3,9}^*) \tag{5.27}$$

となる.

平行移動について, 次の事実を確認しておく.

補題 5.2 (1) $\alpha \in \mathfrak{h}_{3,9}^*$ について, $(\alpha \,|\, \alpha) \neq 0$ とし, $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha \,|\, \alpha)$ とおく. このとき平行移動 T_α は α に関する鏡映 s_α と $\delta - \alpha^\vee$ に関する鏡映の合成 $T_\alpha = s_{\delta-\alpha^\vee} s_\alpha$ で与えられる.
(2) $\alpha \in \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}}$ を任意の実ルートとすると, $\delta - \alpha$ もまた実ルートであって $T_\alpha = s_{\delta-\alpha} s_\alpha$. 従って $w(\beta) = \delta - \alpha$ を満たす $\beta \in \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}}$ と $w \in W_{3,9}$ を任意にとると $T_\alpha = w s_\beta w^{-1} s_\alpha$.

実際, 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}_{3,9}^*$ に対して

$$\begin{aligned}
s_{\delta-\alpha^\vee} s_\alpha(\lambda) &= s_{\delta-\alpha^\vee}\bigl(\lambda - (\alpha^\vee \,|\, \lambda)\alpha\bigr) \\
&= s_{\delta-\alpha^\vee}(\lambda) - (\alpha^\vee \,|\, \lambda) s_{\delta-\alpha^\vee}(\alpha) \\
&= \lambda - (\delta - \alpha^\vee \,|\, \lambda)\left(\frac{(\alpha \,|\, \alpha)}{2}\delta - \alpha\right) - (\alpha^\vee \,|\, \lambda)((\alpha \,|\, \alpha)\delta - \alpha) \\
&= \lambda + (\delta \,|\, \lambda)\alpha - \left(\frac{(\alpha \,|\, \alpha)}{2}(\delta \,|\, \lambda) + (\alpha \,|\, \lambda)\right)\delta = T_\alpha(\lambda)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

となる.

ルート格子の元 $\alpha \in Q_{3,9}$ の定める平行移動 T_α は, Weyl 群 $W_{3,9}$ に属し, 単純ルート α_j $(j = 0, 1, \ldots, 8)$ に関する平行移動に関して関係式

$$T_{\alpha_0}^3 T_{\alpha_1}^2 T_{\alpha_2}^4 T_{\alpha_3}^6 T_{\alpha_4}^5 T_{\alpha_5}^4 T_{\alpha_6}^3 T_{\alpha_7}^2 T_{\alpha_8}^1 = T_\delta = 1 \tag{5.29}$$

が成立する. 特に T_{α_8} は他の T_{α_j} で表される. そこで平行移動の格子を

$$Q_{3,8} = \mathbb{Z}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_7 \tag{5.30}$$

に制限すれば, $W_{3,9}$ が $Q_{3,8} \rtimes W_{3,8} \xrightarrow{\sim} W_{3,9}$ の形に半直積に分解することが知られている. 即ち $W_{3,9}$ の任意の元は

$$T_\alpha\, w = T_{\alpha_0}^{k_0} T_{\alpha_1}^{k_1} \cdots T_{\alpha_7}^{k_7}\; w \qquad (\alpha \in Q_{3,8};\; w \in W_{3,8}) \tag{5.31}$$

の形に一意的に表示される. ここで $\alpha = k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1 + \cdots + k_7\alpha_7$ $(k_0, k_1, \ldots, k_7 \in \mathbb{Z})$ と記した.

零ルートは平行移動に寄与しないので, 平行移動を考察する際には $E_8^{(1)}$ 型の典型的なルートとして $\pm\varepsilon_{ij}, \pm\varepsilon_{ijk} \in \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}}$ を考えればよい. (零ルートを法として考えれば, この 240 個が E_8 型のルート全体 $\Delta_{3,8}$ と一致する.) 次の補題は, 平行移動を $W_{3,9}$ の鏡映を用いて表示する公式を与える. 以下, 相異なる添字 $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$ に対して $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ijk}$ に関する鏡映をそれぞれ

$$s_{ij} = s_{\varepsilon_{ij}}, \qquad s_{ijk} = s_{\varepsilon_{ijk}} \tag{5.32}$$

で表す. 配置空間の文脈では, $s_{ij} \in \mathfrak{S}_9 = \langle s_1, \ldots, s_8 \rangle$ は添字の互換 (i, j) に, s_{ijk} は 3 点 p_i, p_j, p_k を中心とする $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の標準 Cremona 変換に対応する.

補題 5.3 (1) $\{1, 2, \ldots, 9\} = \{i, j, a, b, c, d, e, f, g\}$ と表示するとき

$$T_{\varepsilon_{ij}} = s_{iab}s_{icd}s_{efg}s_{icd}s_{iab}s_{ij}. \tag{5.33}$$

(2) $\{1, 2, \ldots, 9\} = \{i, j, k, a, b, c, d, e, f\}$ と表示するとき

$$T_{\varepsilon_{ijk}} = s_{abc}s_{def}s_{abc}s_{ijk}. \tag{5.34}$$

これを示すには, 前の補題から, それぞれの場合について

$$\begin{array}{lll} (1) & w(\varepsilon_{efg}) = \delta - \varepsilon_{ij} & (w = s_{iab}s_{icd}) \\ (2) & w(\varepsilon_{def}) = \delta - \varepsilon_{ijk} & (w = s_{abc}) \end{array} \tag{5.35}$$

となることを確認すればよい. 念のため $T_{\varepsilon_{ij}}$, $T_{\varepsilon_{ijk}}^{\pm 1}$ の ε 変数への作用を書下しておこう. $i, j \in \{1, \ldots, 9\}$, $i \neq j$ のとき

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon_{ij}}(\varepsilon_0) &= \varepsilon_0 - 3\varepsilon_{ij} + 3\delta \\ T_{\varepsilon_{ij}}(\varepsilon_i) &= \varepsilon_i - \varepsilon_{ij} = \varepsilon_j \\ T_{\varepsilon_{ij}}(\varepsilon_j) &= \varepsilon_j - \varepsilon_{ij} + 2\delta \\ T_{\varepsilon_{ij}}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_k - \varepsilon_{ij} + \delta \qquad (1 \leq k \leq 9;\ k \neq i, j). \end{aligned} \tag{5.36}$$

また, $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$ が相異なるとき

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon_{ijk}}(\varepsilon_0) &= \varepsilon_0 - 3\varepsilon_{ijk} + 4\delta \\ T_{\varepsilon_{ijk}}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_k - \varepsilon_{ijk} + 2\delta \\ T_{\varepsilon_{ijk}}(\varepsilon_l) &= \varepsilon_l - \varepsilon_{ijk} + \delta \qquad (1 \leq l \leq 9;\ l \notin \{i, j, k\}) \\ T_{\varepsilon_{ijk}}^{-1}(\varepsilon_0) &= \varepsilon_0 + 3\varepsilon_{ijk} + 2\delta \\ T_{\varepsilon_{ijk}}^{-1}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_k + \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_0 - \varepsilon_i - \varepsilon_j \\ T_{\varepsilon_{ijk}}^{-1}(\varepsilon_l) &= \varepsilon_l + \varepsilon_{ijk} + \delta \qquad (1 \leq l \leq 9;\ l \notin \{i, j, k\}). \end{aligned} \tag{5.37}$$

上では, $\alpha \in \mathfrak{h}_{3,9}^*$ で $(\delta\,|\,\alpha)=0$ なるものに対して $T_\alpha : \mathfrak{h}_{3,9}^* \to \mathfrak{h}_{3,9}^*$ を定義したが, 同じ $T_\alpha \in W_{3,9}$ の $\mathfrak{h}_{3,9}$ への作用は, α に対応する $h \in \mathfrak{h}_{3,9}$ $(\alpha = (h\,|\,\cdot))$ を用いて

$$T_\alpha(\Lambda) = \Lambda + (c\,|\,\Lambda)\,h - \left(\frac{1}{2}(h\,|\,h)(c\,|\,\Lambda) + (h\,|\,\Lambda)\right)c \qquad (\Lambda \in \mathfrak{h}_{3,9}) \tag{5.38}$$

で与えられる. 以下, 平行移動についても, $T_{ij} = T_{\varepsilon_{ij}}$, $T_{ijk} = T_{\varepsilon_{ijk}}$ なる略記法を用いる.

なお, 格子の τ 函数を定義するときに用いる $W_{3,9}$ 軌道 $M_{3,9} = W_{3,9}\{e_1,\ldots,e_9\}$ は, 今の場合

$$M_{3,9} = \{\Lambda \in L_{3,9} \mid (c\,|\,\Lambda) = -1, \quad (\Lambda\,|\,\lambda) = 1\} \tag{5.39}$$

と書き表すことができる. $W_{3,8}$ は e_9 を動かさないので対応 $\alpha \to T_\alpha.e_9$ によって, 全単射 $Q_{3,8} \xrightarrow{\sim} M_{3,9}$ が誘導される. このことを使うと $M_{3,9}$ の元

$$\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \cdots - \nu_9 e_9 \tag{5.40}$$

については, $\Lambda = e_k$ $(k=1,\ldots,9)$ の場合を除外すれば. $d \geq 1$, $\nu_j \geq 0$ $(j=1,\ldots,9)$ となっていることが直接検証できる.

5.3 $(3,9)$ 型の楕円 Cremona 系と楕円差分 Painlevé 方程式

$(3,9)$ 型楕円 Cremona 系は, パラメータに関する函数体 $\mathbb{K} = \mathbb{C}([\alpha];\, \alpha \in \Delta_{3,9}^{\mathrm{Re}})$ の拡大体

$$\mathcal{L} = \mathbb{K}(f_1,f_2,f_3;\tau_1,\ldots,\tau_9) = \mathbb{K}(x_1\tau_0, x_2\tau_0, x_3\tau_0;\tau_1,\ldots,\tau_9), \tag{5.41}$$

へのアフィン Weyl 群 $W_{3,9} = W(E_8^{(1)})$ の作用で記述される. 念のために単純鏡映の作用を思い出しておこう. τ 函数については

$$\begin{aligned} s_0(\tau_j) &= \begin{cases} \tau_j f_j & (j=1,2,3) \\ \tau_j & (j=4,\ldots,9) \end{cases} \\ s_k(\tau_j) &= \tau_{s_k(j)} \qquad (k=1,\ldots,8;\, j=1,\ldots,9). \end{aligned} \tag{5.42}$$

f 変数については, $i=1,2,3$ に対して

$$s_0(f_i) = \frac{1}{f_i}, \quad s_k(f_i) = f_{s_k(i)} \quad (k=1,2), \quad s_k(f_i) = f_i \quad (k=4,\ldots,8). \tag{5.43}$$

s_3 の作用だけが非自明であって

$$\begin{aligned} s_3(f_1) &= \frac{\tau_3}{\tau_4}\left(\frac{[\varepsilon_{124}][\varepsilon_{14}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{13}]}f_1 - \frac{[\varepsilon_{234}][\varepsilon_{34}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{13}]}f_3\right) \\ s_3(f_2) &= \frac{\tau_3}{\tau_4}\left(\frac{[\varepsilon_{124}][\varepsilon_{24}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{23}]}f_2 - \frac{[\varepsilon_{134}][\varepsilon_{34}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{23}]}f_3\right) \\ s_3(f_3) &= \frac{\tau_3}{\tau_4}f_3 \end{aligned} \tag{5.44}$$

である．f 変数でなく x 変数を用いるときには

$$f_i = \frac{x_i \tau_0}{\tau_1\tau_2\tau_3}, \qquad x_i\tau_0 = f_i\tau_1\tau_2\tau_3 \qquad (i=1,2,3) \tag{5.45}$$

とする．格子上の τ 函数 $(\tau(\Lambda))_{\Lambda\in M_{3,9}}$ は, 格子点の集合

$$M_{3,9} = W_{3,9}e_9 = \{\Lambda \in L_{3,9} | (c\,|\,\Lambda) = -1, \ \ (\Lambda\,|\,\Lambda) = 1\} \tag{5.46}$$

で添字付けられた従属変数の族であって,

$$\tau(e_j) = \tau_j, \qquad w(\tau(\Lambda)) = \tau(w.\Lambda) \quad (\Lambda \in M_{3,9}) \tag{5.47}$$

を満たすように定義したものであった．この場合の典型的な双線形方程式は, 相異なる $i,j,k,l \in \{1,\ldots,9\}$ に対して

$$\begin{gathered}[\varepsilon_{jk}][\varepsilon_{jkl}]\tau(e_i)\tau(e_0-e_i-e_l) + [\varepsilon_{ki}][\varepsilon_{kil}]\tau(e_j)\tau(e_0-e_j-e_l) \\ + [\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{ijl}]\tau(e_k)\tau(e_0-e_k-e_l) = 0.\end{gathered} \tag{5.48}$$

この場合の標準解は

$$f_1^C = \frac{[\varepsilon_0-\varepsilon_2-\varepsilon_3-t]}{[\varepsilon_1-t]}, \ f_2^C = \frac{[\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_3-t]}{[\varepsilon_2-t]}, \ f_3^C = \frac{[\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2-t]}{[\varepsilon_3-t]} \tag{5.49}$$

および

$$\tau_j^C = [\varepsilon_j - t] \quad (j=1,\ldots,9), \quad \tau^C(\Lambda) = [\lambda - t], \quad \lambda = (\Lambda\,|\,\cdot) \quad (\Lambda \in M_{3,9}) \tag{5.50}$$

で与えられる．楕円曲線のパラメータ付けは x 座標

$$\begin{aligned} x^C(t) &= (x_1^C(t), x_2^C(t), x_3^C(t)), \\ x_1^C(t) &= [\varepsilon_0-\varepsilon_2-\varepsilon_3-t][\varepsilon_2-t][\varepsilon_3-t], \\ x_2^C(t) &= [\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_3-t][\varepsilon_1-t][\varepsilon_3-t], \\ x_3^C(t) &= [\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2-t][\varepsilon_1-t][\varepsilon_2-t] \end{aligned} \tag{5.51}$$

で指定する．9 個の参照点 p_j の x 座標は

$$x^C(\varepsilon_j) = ([\varepsilon_{23j}][\varepsilon_{2j}][\varepsilon_{3j}], [\varepsilon_{13j}][\varepsilon_{1j}][\varepsilon_{3j}], [\varepsilon_{12j}][\varepsilon_{1j}][\varepsilon_{2j}]) \qquad (j=1,\ldots,9) \tag{5.52}$$

である．

前節で議論したように

$$f_i = x_i\tau^{h_0} = \frac{s_0(\tau_i)}{\tau_i} \qquad (i=1,2,3) \tag{5.53}$$

を用いると, 配置空間 $\mathbb{X}_{3,10}$ での第 10 番目の点の座標は

$$(z_1 : z_2 : 1) = \left(\frac{[\varepsilon_{14}]}{[\varepsilon_{234}]}\, f_1 : \frac{[\varepsilon_{24}]}{[\varepsilon_{134}]}\, f_2 : \frac{[\varepsilon_{34}]}{[\varepsilon_{124}]}\, f_3 \right) \tag{5.54}$$

で表され, 従って任意の $w \in W_{3,9}$ に対して

$$(w(z_1):w(z_2):1) = \left(\frac{[w(\varepsilon_{14})]}{[w(\varepsilon_{234})]} w(f_1) : \frac{[w(\varepsilon_{24})]}{[w(\varepsilon_{134})]} w(f_2) : \frac{[w(\varepsilon_{34})]}{[w(\varepsilon_{124})]} w(f_3) \right) \tag{5.55}$$

が成立する. f 変数への $w \in W_{3,9}$ の作用は, τ コサイクルによって

$$w(f_i) = w(x_i \tau^{h_0}) = \frac{ws_0(\tau_i)}{w(\tau_i)} = \frac{\phi(ws_0.e_i;x)}{\phi(w.e_i;x)} \tau^{w.h_0} \tag{5.56}$$

と計算される. ここで, $d = \deg(w.h_0)$ とおけば,

$$w(f_i) = \frac{\phi(ws_0.e_i;f)}{\phi(w.e_i;f)} \tau^{w.h_0 - dh_0} \qquad (i=1,2,3). \tag{5.57}$$

これから,

$$(w(f_1):w(f_2):w(f_3)) = \left(\frac{\phi(ws_0.e_1;f)}{\phi(w.e_1;f)} : \frac{\phi(ws_0.e_2;f)}{\phi(w.e_2;f)} : \frac{\phi(ws_0.e_3;f)}{\phi(w.e_3;f)} \right) \tag{5.58}$$

なる表示が得られる. $w = T_{\alpha_j}$ $(j=0,1,\ldots,8)$ の場合に右辺が計算できれば, それが楕円差分 Painlevé 方程式の時間発展の記述を与える訳である.

楕円差分 Painlevé 方程式の具体的な記述を得るためには, 単純ルートに関する平行移動 $T_{\alpha_j} \in W_{3,9}$ $(j=0,1,\ldots,8)$ の f 変数への作用を明示的に計算する必要がある. そのために, 予め必要な ϕ 因子の計算をしておく.

以下で「小さい」Λ に対して格子の τ 函数 $\tau(\Lambda)$ (対応する ϕ 因子) を計算する.

補題 5.4 (1) $i,j \in \{1,\ldots,9\}$ で $i \neq j$ のとき

$$F_{ij}(\varepsilon;x) = \frac{[\varepsilon_{1i}][\varepsilon_{1j}][\varepsilon_{1ij}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]} x_1 - \frac{[\varepsilon_{2i}][\varepsilon_{2j}][\varepsilon_{2ij}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]} x_2 + \frac{[\varepsilon_{3i}][\varepsilon_{3j}][\varepsilon_{3ij}]}{[\varepsilon_{13}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]} x_3 \tag{5.59}$$

と定義すると,

$$\tau(e_0 - e_i - e_j) = \frac{\tau_0}{\tau_i \tau_j} F_{ij}(\varepsilon;x) = \frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{\tau_i\tau_j} F_{ij}(\varepsilon;f). \tag{5.60}$$

(2) $i,j \in \{4,\ldots,9\}$ で $i \neq j$ のとき

$$G_{ij}(\varepsilon;x) = -\frac{[\varepsilon_{23i}][\varepsilon_{23j}][\varepsilon_{1ij}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]} x_2x_3 + \frac{[\varepsilon_{13i}][\varepsilon_{13j}][\varepsilon_{2ij}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]} x_1x_3 - \frac{[\varepsilon_{12i}][\varepsilon_{12j}][\varepsilon_{3ij}]}{[\varepsilon_{13}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]} x_1x_2 \tag{5.61}$$

と定義すると

$$\tau(2e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_i - e_j) = \frac{\tau_0^2}{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_i\tau_j} G_{ij}(\varepsilon;x) = \frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{\tau_i\tau_j} G_{ij}(\varepsilon;f). \tag{5.62}$$

上記の F_{ij}, G_{ij} は, それぞれ $\Lambda = e_0 - e_i - e_j$, $\Lambda = 2e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_i - e_j$ に対する ϕ 因子 $\phi(\Lambda;x)$ である. 図式

$$\begin{aligned} \tau_1 = \tau(e_1) &\overset{s_0}{\to} \tau(e_0 - e_2 - e_3) \overset{s_3}{\to} \tau(e_0 - e_2 - e_4) \\ &\overset{s_2 s_4}{\to} \tau(e_0 - e_3 - e_5) \overset{s_3}{\to} \tau(e_0 - e_4 - e_5) \end{aligned} \tag{5.63}$$

を辿って順に計算すれば F_{45} が得られる. (但し, 最後のステップで, Riemann 関係式を用いて x_3 の係数を因数分解する必要がある.) F_{45} が得られれば, 添字の対称性から $i,j\in\{4,\ldots,9\}$ $(i\neq j)$ の場合の表示として補題の F_{ij} が得られる. 一旦こう書いてしまえば, 同じ式で一般の $i,j\in\{1,\ldots,9\}$ $(i\neq j)$ の場合もカバーされることが検証できる. G_{ij} $(i,j\in\{4,\ldots,9\};i\neq j)$ を得るには, さらに s_0 を作用させて

$$\tau(e_0-e_i-e_j)\xrightarrow{s_0}\tau(e_0-e_i-e_j+h_0)=\tau(2e_0-e_1-e_2-e_3-e_i-e_j) \tag{5.64}$$

を計算すればよい.

註釈 5.5 上のように段階的に計算をやるよりも, 実際には標準解を利用する方が見通しよく計算できる. G_{ij} の場合を例にとって説明しよう. G_{ij} は $\Lambda=2e_0-e_1-e_2-e_3-e_i-e_j$ $(i,j\notin\{1,2,3\})$ の場合の ϕ 因子だから, $L(\Lambda)$ に属す. 特に 2 次同次式で単項式 x_1^2,x_2^2,x_3^2 を含まないので

$$G_{ij}(x)=c_1x_2x_3+c_2x_1x_2+c_3x_1x_2 \qquad (c_1,c_2,c_3\in\mathbb{K}) \tag{5.65}$$

と表せる. この $G_{ij}(x)$ に標準解 $x^C(t)=(x_1^C(t),x_2^C(t),x_3^C(t))$ を代入すると

$$\begin{gathered}G_{ij}(x^C(t))=[\lambda-t][\varepsilon_1-t][\varepsilon_2-t][\varepsilon_3-t][\varepsilon_i-t][\varepsilon_j-t]\\ \lambda=(\Lambda\,|\,\cdot)=2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_i-\varepsilon_j-t\end{gathered} \tag{5.66}$$

となることを, 我々は既に知っている. 代入して整理すると

$$c_1[\varepsilon_{13*}][\varepsilon_{12*}][\varepsilon_{1*}]+c_2[\varepsilon_{23*}][\varepsilon_{12*}][\varepsilon_{2*}]+c_3[\varepsilon_{13*}][\varepsilon_{23*}][\varepsilon_{3*}]=[\varepsilon_{123}+\varepsilon_{ij*}][\varepsilon_{i*}][\varepsilon_{j*}] \tag{5.67}$$

ここで, $t=\varepsilon_*$ と考えて $\varepsilon_{ijk},\varepsilon_{ij}$ の記号を援用した. $t=\varepsilon_0-\varepsilon_2-\varepsilon_3$ とおくと $\varepsilon_{23*}=0$ となり

$$c_1[-\varepsilon_{12}][-\varepsilon_{13}][-\varepsilon_{123}]=[\varepsilon_{1ij}][-\varepsilon_{23i}][-\varepsilon_{23j}]. \tag{5.68}$$

従って

$$c_1=-\frac{[\varepsilon_{1ij}][\varepsilon_{23i}][\varepsilon_{23j}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]} \tag{5.69}$$

と決まる, 等々. □

Λ の次数が増えると ϕ 因子の具体形を書下すのは難しくなる. 単に多項式の項数が増えるだけでなく, 係数が函数 $[x]$ の積に分解するとは限らないからである. 以下に, もう少し複雑な ϕ 因子の例として 5 点を通る 2 次曲線を表す ϕ 因子の具体形を掲げておく (上の註釈のやり方で計算できる). $j_1,\ldots,j_5\in\{1,2,\ldots,9\}$ を相異なる添字とするとき, ϕ 因子

$$\phi(\Lambda;x), \qquad \Lambda=2e_0-e_{j_1}-\cdots-e_{j_5} \tag{5.70}$$

は, 次で与えられる:

$$\begin{aligned}\phi(\Lambda;x)=&-\sum_{a=1}^{3}\frac{[\lambda-\varepsilon_a]\prod_{k=1}^{5}[\varepsilon_{aj_k}]}{[\varepsilon_{123}]^2[\varepsilon_{ab}]^2[\varepsilon_{ac}]^2}\left(x_a^2-\frac{[\varepsilon_{ac}][\varepsilon_{abb}]}{[\varepsilon_{bc}][\varepsilon_{aab}]}x_ax_b-\frac{[\varepsilon_{ab}][\varepsilon_{acc}]}{[\varepsilon_{cb}][\varepsilon_{aac}]}x_ax_c\right)\\ &-\sum_{a=1}^{3}\frac{[\lambda-\varepsilon_{123}-\varepsilon_a]\prod_{k=1}^{5}[\varepsilon_{bcj_k}]}{[\varepsilon_{123}]^2[\varepsilon_{ab}][\varepsilon_{ac}][\varepsilon_{bbc}][\varepsilon_{bcc}]}x_bx_c\end{aligned} \tag{5.71}$$

ここで, $\lambda = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_{j_1} - \cdots - \varepsilon_{j_5}$. また和の各項で, $a = 1,2,3$ に対して $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$ なる添字を b,c と記した. (x_1^2, x_2^2, x_3^3 の係数は因子化されているが, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2 の係数は 3 項の和で表されている.) この多項式は, 例によって, 標準解に特殊化したときに

$$\phi(\Lambda; x^C(t)) = [\lambda - t] \prod_{k=1}^{5} [\varepsilon_{j_k} - t] \tag{5.72}$$

となるという条件で一意的に決まる. この $\phi(\Lambda; x)$ を用いると

$$\tau(\Lambda) = \frac{\tau_0^2}{\tau_{j_1} \cdots \tau_{j_5}} \phi(\Lambda; x) = \frac{(\tau_1\tau_2\tau_3)^2}{\tau_{j_1} \cdots \tau_{j_5}} \phi(\Lambda; f) \tag{5.73}$$

である. $j_1, \ldots, j_5$ のうちの 3 個が $1,2,3$ の場合には, 上の補題で記した G_{ij} に戻る.

5.4 楕円差分方程式の導出 (その 1)

以上の準備の下に, 例として単純ルート $\alpha_7 = (h_7 \,|\, \cdot)$ に関する f 変数の平行移動 $T_{78} = T_{\alpha_7}$ を調べよう.

$$T_{78}(f_i) = \frac{\phi(T_{78}(h_0 + e_i); f)}{\phi(T_{78}(e_i); f)}. \tag{5.74}$$

(今の場合 $T_{78}(h_0) = h_0$ だから右辺に τ の因子は出ない.) $L_{3,9}$ の格子点 e_i $(i = 1,2,3)$ を T_{78} で動かすと

$$T_{78}(e_i) = e_i - h_7 + c = 3e_0 - e_j - e_k - e_4 - e_5 - e_6 - 2e_7 - e_9 \tag{5.75}$$

となる ($\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$). これは, 分母に現れる ϕ 因子が 3 次同次多項式であり, その零点の位数は (p_i, p_j, p_k) で $(0,1,1)$, また $(p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9)$ では, $(1,1,1,2,0,1)$ となることを意味している. 同様に

$$T_{78}(h_0 + e_i) = h_0 + e_i - h_7 + c = 4e_0 - e_i - 2e_j - 2e_k - e_4 - e_5 - e_6 - 2e_7 - e_9 \tag{5.76}$$

は, 分子の ϕ 因子は 4 次同次多項式であることを意味している. 分子分母も, 明示的に書下すには大きすぎるので, この形で直接計算することは諦めて, T_{78} をもう少し小さい変換の積に分解することを考えよう.

前項の補題 5.3 から

$$T_{78} = s_{167}s_{257}s_{349}s_{257}s_{167}s_{78} \tag{5.77}$$

である. (ここで $(1,6)$ $(2,5)$, $(3,4)$ を組にしたが, 別の組み方でもよい.) 一般に相異なる添字 $a,b,i,j \in \{1,2,\ldots,9\}$ に対して

$$s_{abi}s_{ij}s_{abi} = s_{abj} \tag{5.78}$$

が成立する (実際 $s_{abi}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{abj}$). T_{78} の表示で, 中央の s_{349} を s_{347} に書直すと

$$T_{78} = s_{167}s_{257}s_{347}s_{79}s_{347}s_{257}s_{167}s_{78} \tag{5.79}$$

$s_{79}=s_{89}s_{78}s_{89}$ と書いて右の s_{89} を移動すると

$$T_{78}=s_{167}s_{257}s_{347}s_{89}s_{78}s_{347}s_{257}s_{167}s_{89}s_{78} \tag{5.80}$$

なる表示を得る. s_{167},s_{257},s_{347} は互いに可換なので

$$T_{78}=w^2, \qquad w=s_{167}s_{257}s_{347}s_{89}s_{78} \tag{5.81}$$

と表される.

$$\begin{aligned} w(e_1)&=s_{167}(e_1)=e_0-e_6-e_7,\\ w(e_2)&=s_{257}(e_2)=e_0-e_5-e_7,\\ w(e_3)&=s_{347}(e_3)=e_0-e_4-e_7 \end{aligned} \tag{5.82}$$

また $w(h_0)=h_0$ なので,

$$\begin{aligned} w(h_0+e_1)&=2e_0-e_1-e_2-e_3-e_6-e_7,\\ w(h_0+e_2)&=2e_0-e_1-e_2-e_3-e_5-e_7,\\ w(h_0+e_3)&=2e_0-e_1-e_2-e_3-e_4-e_7 \end{aligned} \tag{5.83}$$

となる. これで, 予め計算しておいた $\tau(\Lambda)$ の式が利用できる. つまり, $w=s_{127}s_{347}s_{567}s_{89}s_{78}$ については, $i=1,2,3$ に対して

$$w(f_i)=\frac{w(\tau(h_0+e_i))}{w(\tau(e_i))}=\frac{\tau(h_0+e_0-e_j-e_7)}{\tau(e_0-e_j-e_7)}=\frac{G_{j7}(\varepsilon;f)}{F_{j7}(\varepsilon;f)} \quad (j=7-i) \tag{5.84}$$

と明示的に書下せる訳である. $T_{78}=w^2$ だからもう一度 w を施せば

$$T_{78}(f_i)=\frac{G_{j7}(w(\varepsilon);w(f))}{F_{j7}(w(\varepsilon);w(f))}. \tag{5.85}$$

そこで $g_i=w(f_i)$ $(i=1,2,3)$ とおいて, $i=1,2,3$ に対して $j=6,5,4$ と書いて

$$\begin{aligned} P_i(\varepsilon;x)&=F_{j7}(\varepsilon;x), \qquad & Q_i(\varepsilon;x)&=G_{j7}(\varepsilon;x),\\ R_i(\varepsilon;x)&=P_i(w(\varepsilon);x), \qquad & S_i(\varepsilon;x)&=Q_i(w(\varepsilon);x) \end{aligned} \tag{5.86}$$

と定義すれば, T_{78} による離散時間発展 $\overline{\varphi}=T_{78}(\varphi)$ は

$$\overline{f_i}=\frac{S_i(\varepsilon;g)}{R_i(\varepsilon;g)}, \quad g_i=\frac{Q_i(\varepsilon;f)}{P_i(\varepsilon;f)} \quad (i=1,2,3) \tag{5.87}$$

で与えられる. これは, T_{78} の作用を

$$(f_1,f_2,f_3)\ \xrightarrow{w}\ (g_1,g_2,g_3)\ \xrightarrow{w}\ (\overline{f_1},\overline{f_2},\overline{f_3}) \tag{5.88}$$

と 2 段階に分けて表示したものである. P_i,R_i は 1 次同次式で $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ の形, Q_i,R_i は $b_1x_2x_3+b_2x_1x_3+b_3x_1x_2$ の形の 2 次同次式である. 念のため, P_i, Q_i, R_i, S_i の具体的な式を書下しておこう.

$$\begin{aligned} P_i&=\frac{[\varepsilon_{1j}][\varepsilon_{17}][\varepsilon_{1j7}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]}x_1-\frac{[\varepsilon_{2j}][\varepsilon_{27}][\varepsilon_{2j7}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]}x_2+\frac{[\varepsilon_{3j}][\varepsilon_{37}][\varepsilon_{3j7}]}{[\varepsilon_{13}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]}x_3\\ Q_i&=-\frac{[\varepsilon_{23j}][\varepsilon_{237}][\varepsilon_{1j7}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]}x_2x_3+\frac{[\varepsilon_{13j}][\varepsilon_{137}][\varepsilon_{2j7}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]}x_1x_3-\frac{[\varepsilon_{12j}][\varepsilon_{127}][\varepsilon_{3j7}]}{[\varepsilon_{13}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]}x_1x_2 \end{aligned} \tag{5.89}$$

ここで, $i=1,2,3$ に対して $j=7-i=6,5,4$.

$$\begin{aligned} R_i &= -\frac{[\varepsilon_{i6}][\varepsilon_{679}][\overline{\varepsilon_{i68}}]}{[\varepsilon_{46}][\varepsilon_{56}][\varepsilon_{123}]}x_1 + \frac{[\varepsilon_{i5}][\varepsilon_{579}][\overline{\varepsilon_{i58}}]}{[\varepsilon_{45}][\varepsilon_{56}][\varepsilon_{123}]}x_2 - \frac{[\varepsilon_{i4}][\varepsilon_{479}][\overline{\varepsilon_{i48}}]}{[\varepsilon_{45}][\varepsilon_{46}][\varepsilon_{123}]}x_3 \\ S_i &= -\frac{[\varepsilon_{ab6}][\overline{\varepsilon_{458}}][\overline{\varepsilon_{i68}}]}{[\varepsilon_{46}][\varepsilon_{56}][\varepsilon_{123}]}x_2x_3 + \frac{[\varepsilon_{ab5}][\overline{\varepsilon_{468}}][\overline{\varepsilon_{i58}}]}{[\varepsilon_{45}][\varepsilon_{56}][\varepsilon_{123}]}x_1x_3 - \frac{[\varepsilon_{ab4}][\overline{\varepsilon_{568}}][\overline{\varepsilon_{i48}}]}{[\varepsilon_{45}][\varepsilon_{46}][\varepsilon_{123}]}x_1x_2 \end{aligned} \tag{5.90}$$

$i=1,2,3$ に対して $\{i,a,b\}=\{1,2,3\}$ なる a,b をとる. また $i,j\in\{1,\ldots,6\}$ に対して $\overline{\varepsilon_{ij8}}=T_{78}(\varepsilon_{ij8})=\varepsilon_{ij8}-\delta$ である.

上で用いた $w=s_{167}s_{257}s_{347}s_{89}s_{78}$ を

$$w=\sigma s_{78}, \qquad \sigma=s_{167}s_{257}s_{347}s_{89} \tag{5.91}$$

と書くと, σ は 4 個の可換な鏡映の積であって, それ自身 $\sigma^2=1$ を満たす. しかも, f_i は s_{78} で不変だから $g_i=\sigma(f_i)$ で, g_i は $\sigma s_{78}\sigma=T_{78}s_{78}$ で不変となる. この $T_{78}s_{78}$ を

$$g_i=\frac{G_{j7}(\varepsilon;f)}{F_{j7}(\varepsilon;f)} \qquad (i=1,2,3) \tag{5.92}$$

に作用させて

$$g_i=\frac{G_{j8}(\overline{\varepsilon};\overline{f})}{F_{j8}(\overline{\varepsilon};\overline{f})} \qquad (i=1,2,3) \tag{5.93}$$

を得る. (これは, $\overline{f}$ から g に戻る変換である.) 両者を等置すると

$$\frac{G_{j7}(\varepsilon;f)}{F_{j7}(\varepsilon;f)}=\frac{G_{j8}(\overline{\varepsilon};\overline{f})}{F_{j8}(\overline{\varepsilon};\overline{f})} \qquad (j=4,5,6). \tag{5.94}$$

これは T_{78} による離散時間発展 $(f_1,f_2,f_3)\to(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)$ を, 3 個の代数関係式で陰に指定する方程式である.

ここでは, $T_{78}=T_{\alpha_7}$ による離散時間発展の記述を行ったが, 添字に関する対称性があるので, $i,j\in\{4,5,6,7,8,9\}$ $(i\neq j)$ の場合の $T_{ij}=T_{\varepsilon_{ij}}$ については, 本質的な差はない.

5.5 楕円差分方程式の導出 (その 2)

前項の議論では, 最初の 3 点を基準にとった同次座標系に対応する従属変数 (f_1,f_2,f_3) を用いて, 平行移動 T_{ij} $(i,j\in\{4,5,6,7,8,9\};i\neq j)$ による時間発展を明示的に表す方法を述べた. この項では, この考え方を応用して, 平行移動 T_{ij}, T_{ijk} による時間発展を記述する一つの方法を述べる.

格子の τ 函数 $\tau(\Lambda)$ $(\Lambda\in M_{3,9})$ のレベルでは, 9 個の添字が完全に対等になっていることに注意すると, τ 函数から, 9 個の点のうちの任意の 3 点 p_a,p_b,p_c を基準にとった同次座標系を導入することができる. 相異なる 3 個の添字 $a,b,c\in\{1,\ldots,9\}$ に対して従属変数 f_a^{bc} を

$$f_a^{bc}=\frac{s_{abc}(\tau_a)}{\tau_a}=\frac{\tau(e_0-e_b-e_c)}{\tau(e_a)} \tag{5.95}$$

で定義する (b, c に関しては対称). この定義から, 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_9$ で $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c$ となるものを任意にとれば, $\sigma(f_1) = f_a^{bc}$ である. このとき, $(f_a^{bc}, f_b^{ac}, f_c^{ab})$ は, (f_1, f_2, f_3) を上のような σ で変換したものなので, 3 点 p_a, p_b, p_c を基準点とする同次座標系を表す.

補題 5.4 を用いると f_a^{bc} は最初の変数 (f_1, f_2, f_3) を用いて

$$f_a^{bc} = \frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{\tau_a\tau_b\tau_c}\left(\frac{[\varepsilon_{1b}][\varepsilon_{1c}][\varepsilon_{1bc}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]}f_1 + \frac{[\varepsilon_{2b}][\varepsilon_{2c}][\varepsilon_{2bc}]}{[\varepsilon_{21}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]}f_2 + \frac{[\varepsilon_{3b}][\varepsilon_{3c}][\varepsilon_{3bc}]}{[\varepsilon_{31}][\varepsilon_{32}][\varepsilon_{123}]}f_3\right) \tag{5.96}$$

と表される. 別の相異なる 3 つの添字 $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$ に対して同次座標系 $(f_i^{jk}, f_j^{ik}, f_k^{ij})$ をとると, $\mathfrak{S}_9$ 対称性から一般に

$$f_a^{bc} = \frac{\tau_i\tau_j\tau_k}{\tau_a\tau_b\tau_c}\left(\frac{[\varepsilon_{ib}][\varepsilon_{ic}][\varepsilon_{ibc}]}{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{ik}][\varepsilon_{ijk}]}f_i^{jk} + \frac{[\varepsilon_{jb}][\varepsilon_{jc}][\varepsilon_{jbc}]}{[\varepsilon_{ji}][\varepsilon_{jk}][\varepsilon_{ijk}]}f_j^{ik} + \frac{[\varepsilon_{kb}][\varepsilon_{kc}][\varepsilon_{kbc}]}{[\varepsilon_{ki}][\varepsilon_{kj}][\varepsilon_{ijk}]}f_k^{ij}\right) \tag{5.97}$$

が成立する. これが 2 つの同次座標系の間の線形変換を表す. この変換公式は, $\{a, b, c\}$ と $\{i, j, k\}$ の間に共通の添字があってもよい. 特別な場合として

$$\begin{aligned} f_a^{bc} &= \frac{\tau_i\tau_j}{\tau_a\tau_b}\left(\frac{[\varepsilon_{ib}][\varepsilon_{ibc}]}{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{ijc}]}f_i^{jc} + \frac{[\varepsilon_{jb}][\varepsilon_{jbc}]}{[\varepsilon_{ji}][\varepsilon_{ijc}]}f_j^{ic}\right) && (c = k) \\ f_a^{bc} &= \frac{\tau_i}{\tau_a}\, f_i^{bc} && (\{b, c\} = \{j, k\}) \end{aligned} \tag{5.98}$$

を含む. (f_1, f_2, f_3 への $s_3 = s_{123}$ の作用と比較せよ.)

前項の計算を, 添字を対等に扱う流儀で書直すと次のようになる. 平行移動 T_{ij} の記述のために, $\{i, j, a, b, c, a', b', c', d\} = \{1, \ldots, 9\}$ なる添字 $a, b, \ldots, d$ を選んで

$$T_{ij} = (\pi s_{ij})^2, \quad \pi = s_{iaa'}s_{ibb'}s_{icc'}s_{jd} \tag{5.99}$$

という形の分解をとる ($\pi^2 = 1$). π は入替え

$$\begin{gathered} \varepsilon_k \leftrightarrow \varepsilon_0 - \varepsilon_{k'} - \varepsilon_i \qquad (k = a, b, c, a', b', c'), \\ \varepsilon_i \leftrightarrow \delta - \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_d, \qquad \varepsilon_j \leftrightarrow \varepsilon_d \end{gathered} \tag{5.100}$$

を行う対合である (但し $k = a, b, c, a', b', c'$ に対して $k' = a', b', c', a, b, c$ とする). これを使って

$$\begin{aligned} &\varphi_a = f_a^{bc}, && \varphi_b = f_b^{ac}, && \varphi_c = f_c^{ab}, \\ &\psi_a = \pi(f_a^{bc}), && \psi_b = \pi(f_b^{ac}), && \psi_c = \pi(f_c^{ab}) \end{aligned} \tag{5.101}$$

とおくと, T_{ij} による時間発展は, 2 つの変換の合成

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{Q_k(\varepsilon;\varphi)}{P_k(\varepsilon;\varphi)} = \frac{\beta_a^k\,\varphi_b\varphi_c + \beta_b^k\,\varphi_a\varphi_c + \beta_c^k\,\varphi_a\varphi_b}{\alpha_a^k\,\varphi_a + \alpha_b^k\,\varphi_b + \alpha_c^k\,\varphi_c} && (k = a, b, c), \\ T_{ij}(\varphi_k) &= \frac{S_k(\varepsilon;\psi)}{R_k(\varepsilon;\psi)} = \frac{\delta_a^k\,\psi_b\psi_c + \delta_a^k\,\psi_a\psi_c + \delta_a^k\,\psi_a\psi_b}{\gamma_a^k\,\psi_a + \gamma_b^k\,\psi_b + \gamma_c^k\,\psi_c} && (k = a, b, c) \end{aligned} \tag{5.102}$$

として与えられる. ここで, $\{p, q, r\} = \{a, b, c\}$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha_a^p &= \frac{[\varepsilon_{ap'}][\varepsilon_{ai}][\varepsilon_{ap'i}]}{[\varepsilon_{ab}][\varepsilon_{ac}][\varepsilon_{abc}]}, & \beta_a^p &= -\frac{[\varepsilon_{bcp'}][\varepsilon_{bci}][\varepsilon_{ap'i}]}{[\varepsilon_{ab}][\varepsilon_{ac}][\varepsilon_{abc}]}, \\ \gamma_a^p &= \frac{[\varepsilon_{a'p}][\varepsilon_{a'di}][\varepsilon^-_{a'pj}]}{[\varepsilon_{a'b'}][\varepsilon_{a'c'}][\varepsilon_{abc}]}, & \delta_a^p &= -\frac{[\varepsilon_{a'qr}][\varepsilon^-_{b'c'j}][\varepsilon^-_{a'pj}]}{[\varepsilon_{a'b'}][\varepsilon_{a'c'}][\varepsilon_{abc}]}. \end{aligned} \tag{5.103}$$

また $\varepsilon_{lmn}^{-}=\varepsilon_{lmn}-\delta$ と記した.

T_{ijk} 型の平行移動も, T_{ij} 型の平行移動をアフィン Weyl 群の作用で共役変換したものなので, 従属変数を取替えれば, 同じ形式で記述することができる. ここでは, 話を見やすくするために一旦 T_{78} の場合に戻り, これから T_{189} の時間発展についての記述を導く方法を述べる.

$$g_i=\frac{Q_i(\varepsilon;f)}{P_i(\varepsilon;f)},\quad T_{78}(f_i)=\frac{S_i(\varepsilon;g)}{R_i(\varepsilon;g)}\qquad(i=1,2,3)\tag{5.104}$$

今 $s_{179}(\varepsilon_{78})=\varepsilon_{189}$, 従って $T_{189}=s_{179}T_{78}s_{179}$ となることに注意して

$$\varphi_i=s_{179}(f_i),\qquad \psi_i=s_{179}(g_i)\qquad(i=1,2,3)\tag{5.105}$$

と定義すると

$$\psi_i=\frac{\widetilde{Q}_i(\varepsilon;\varphi)}{\widetilde{P}_i(\varepsilon;\varphi)},\quad T_{189}(\varphi_i)=\frac{\widetilde{S}_i(\varepsilon;\psi)}{\widetilde{R}_i(\varepsilon;\psi)}\qquad(i=1,2,3)\tag{5.106}$$

となり, φ_i が T_{78} に対する f_i と同様の形式で時間発展する. ($\widetilde{P}_i$ 等は, P_i の係数に s_{179} を作用させたものである.) 但しもとの従属変数 (f_1,f_2,f_3) と新しい従属変数 $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ の間の変換は, 次のように与えられる.

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\frac{G_{79}(\varepsilon;f)}{F_{79}(\varepsilon;f)},\quad \varphi_2=f_2,\quad \varphi_3=f_3.\\ f_1&=\frac{\widetilde{G}_{79}(\varepsilon;\varphi)}{\widetilde{F}_{79}(\varepsilon;\varphi)},\quad f_2=\varphi_2,\quad f_3=\varphi_3.\end{aligned}\tag{5.107}$$

なお, [16], [12] においても, ここで述べたものとは異なる観点から, 楕円差分 Painlevé 方程式の時間発展の具体的な記述の方法が論じられていることを付記しておく.

5.6 ϕ 因子の行列式表示

$\Lambda=de_0-\nu_1e_1-\cdots-\nu_9e_9\in M_{3,9}$ のとき, ϕ 因子 $\phi(\Lambda;x)$ は, 次数と点 $p_1,p_2,\ldots,p_9$ における零点の位数の条件

$$\deg(\phi(\Lambda;x))=d,\qquad \mathrm{ord}_{p_j}(\phi(\Lambda;x)\geq\nu_j\quad(j=1,\ldots,9)\tag{5.108}$$

で, 定数倍を除いて特徴づけられる同次多項式であり, 標準解での規格化条件

$$\phi(\Lambda;x^C(t))=[\lambda-t][\varepsilon_1-t]^{\nu_1}\cdots[\varepsilon_9-t]^{\nu_9}\quad(\lambda=d\varepsilon_0-\nu_1\varepsilon_1-\cdots-\nu_9\varepsilon_9)\tag{5.109}$$

を用いると, その定数倍の不定性も決まる. この $(m,n)=(3,9)$ の場合には特別な事情により, $\phi(\Lambda;x)$ を「補間多項式」の意味で行列式表示することができる.

各 $d=0,1,2,\ldots$ に対して, 3 変数 $x=(x_1,x_2,x_3)$ の d 次の単項式全部を並べた列ベクトルを

$$\boldsymbol{m}_d(x)=(x^{\mu})_{|\mu|=d}=(x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}x_3^{\mu_3})_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=d}\tag{5.110}$$

で表そう (並べる順序は問わない). このような単項式の個数は

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_d = \binom{d+2}{2} = \frac{1}{2}(d+1)(d+2) \tag{5.111}$$

である. さらに, $k = 0, 1, \ldots, d$ に対して, $\boldsymbol{m}_d(x)$ の k 階偏導函数全てを横に並べて $\binom{d+2}{2} \times \binom{k+2}{2}$ 行列をつくる:

$$\boldsymbol{m}_d^{(k)}(x) = (\partial_x^\kappa(x^\mu))_{|\mu|=d,|\kappa|=k} = \left(\partial_{x_1}^{\kappa_1}\partial_{x_2}^{\kappa_2}\partial_{x_3}^{\kappa_3}(x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}x_3^{\mu_3})\right)_{|\mu|=d,|\kappa|=k} \tag{5.112}$$

($k < 0$ のときは, $\boldsymbol{m}_d^{(k)}(x)$ は「空行列」とみなす.) そこで

$$\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \ldots - \nu_9 e_9 \in M_{3,9} \tag{5.113}$$

に対して, 次の行列式を考えよう:

$$F(\Lambda; x) = \det\left(\boldsymbol{m}_d^{(\nu_1-1)}(p_1), \ldots, \boldsymbol{m}_d^{(\nu_9-1)}(p_9), \boldsymbol{m}_d(x)\right). \tag{5.114}$$

ここで, $\boldsymbol{m}_d^{(k)}(p_j)$ と書いたのは, $\boldsymbol{m}_d^{(k)}(x)$ に参照点 p_j の座標

$$(x_1, x_2, x_3) = ([\varepsilon_{23j}][\varepsilon_{2j}][\varepsilon_{3j}], [\varepsilon_{13j}][\varepsilon_{1j}][\varepsilon_{3j}], [\varepsilon_{12j}][\varepsilon_{1j}][\varepsilon_{2j}]) \tag{5.115}$$

を代入したものの意味である. $\Lambda \in M_{3,9}$ のときは, 常に $d \geq 0$, $\nu_j \geq -1$ $(j = 1, \ldots, 9)$ であることに注意すると

$$\binom{d+2}{2} - \sum_{j=1}^{9}\binom{\nu_j+1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\big((c\,|\,\Lambda) + (\Lambda\,|\,\Lambda)\big) = 0 \tag{5.116}$$

から, $F(\Lambda; x)$ の定義に用いた行列は確かに正方行列である. $F(\Lambda; x)$ は d 次同次多項式であって, 各 p_j で ν_j 次以上の零点をもつので $F(\Lambda; x) \in L(\Lambda)$. 一方, $\dim_{\mathbb{K}} L(\Lambda) = 1$ ということは既に分かっているので, $F(\Lambda; x)$ は多項式として 0 ではない. ($F(\Lambda; x)$ が多項式として 0 となることと, (5.114) の行列で最後の列を取り除いた行列の余階数が 2 以上となることは同値. 従ってまた $\dim_{\mathbb{K}} L(\Lambda) \geq 2$ となることと同値である.) 以上から $\phi(\Lambda; x)$ は $F(\Lambda; x)$ の定数倍 ($\in \mathbb{K}$) であることが分かる. 従って

定理 5.6 $\Lambda \in M_{3,9}$ のとき $x = (x_1, x_2, x_3)$ の同次多項式 $F(\Lambda; x)$ を行列式 (5.114) によって定義する. このとき $F(\Lambda; x)$ を標準解 $x^C(t)$ を代入したものは, $C_\Lambda \in \mathbb{K}, C_\Lambda \neq 0$ なる定数を用いて

$$F(\Lambda; x^C(t)) = C_\Lambda\,[\lambda - t]\prod_{j=1}^{9}[\varepsilon_j - t]^{\nu_j}, \quad \lambda = (\Lambda\,|\,\cdot) \in \mathfrak{h}_{3,9}^* \tag{5.117}$$

と表示される. この規格化定数を用いると ϕ 因子 $\phi(\Lambda; x)$ は行列式

$$\phi(\Lambda; x) = C_\Lambda^{-1} F(\Lambda; x) \tag{5.118}$$

で与えられる.

5.7 平面曲線の幾何による楕円差分 Painlevé 方程式の記述

$(3,9)$ 型の楕円差分 Painlevé 方程式の離散時間発展のうち T_{ij} $(i,j \in \{1,\ldots,9\}, i \neq j)$ 型の平行移動に由来するものについては, 平面曲線の幾何による平易な記述が可能である. 以下では, 射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の一般な 10 点配置 $[p_1,\ldots,p_9,q] \in \mathbb{X}_{3,10}$ に対して, w の作用

$$[p_1,\ldots,p_9,q].T_{ij} = [\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_9,\overline{q}] \tag{5.119}$$

を, 平面幾何の言葉で記述することを考える.

初めに, 平面 3 次曲線上の点の加法について復習しておこう. $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を非特異な 3 次曲線とし, その上の 1 点 $p_0 \in C$ を固定する. 2 点 $p,q \in C$ が与えられたとき, p,q を通る直線 $L_{p,q}$ をとり $L_{p,q}$ と C の第 3 の交点を r', $L_{p_0,r'}$ と C との第 3 の交点を r とするとき, p, q の和を $p+q=r$ として定義する. (但し $p=q$ のときは, $L_{p,p}$ をそこでの C の接線と解釈する.) この加法によって C がアーベル群をなす (p_0 が単位元) ことは良く知られている. (C が特異点を持つ既約 3 次曲線の場合は, 上のやり方で特異点を取り除いた開集合に加法が定義される.) 以下では $p,q,p',q' \in C$ に対して, $p+q=p'+q'$ となる状況を考えるが, これは $L_{p,q}$ と C の第 3 の交点と $L_{p',q'}$ と C の第 3 の交点が一致することなので, 原点 $p_0 \in C$ の取り方に依らない条件となっていることに注意しておこう.

示したいのは次の定理である. T_{ij} の i,j はどう選んでも良いので T_{89} で考える.

定理 5.7 射影平面内の一般の位置にある *10* 点 $p_1,\ldots,p_9,q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ に対して, 非特異 3 次曲線 C, D で

$$p_1,\ldots,p_8,p_9 \in C, \qquad p_1,\ldots,p_8,q \in D \tag{5.120}$$

なるものがあると仮定する. そこで次の条件で *3* 点 $\overline{p}_8,\overline{p}_9 \in C$, $\overline{q} \in D$ を定める*:*

(1) $p_1,\ldots,p_8,\overline{p}_9$ は 3 次曲線のペンシルの基点となる.

(2) C 上の加法で $\overline{p}_8+\overline{p}_9 = p_8+p_9$.

(3) D 上の加法で $\overline{p}_9+\overline{q} = p_8+q$.

(特に, $\overline{p}_9$ は C と D の第 *9* の交点である.) このとき, 点配置 $[p_1,\ldots,p_8,p_9,q] \in \mathbb{X}_{3,10}$ の T_{89} による時間発展は

$$[p_1,\ldots,p_8,p_9,q].T_{89} = [p_1,\ldots,\overline{p}_8,\overline{p}_9,\overline{q}] \tag{5.121}$$

で与えられる.

[8] では, この定理に対して [13], [10] の結果を用いた幾何学証明を与えたが, 以下では少し見方を変えて, この論説で議論したような楕円曲線のパラメータ付けを使った証明を記す.

ここでは, 第 3.4 節で述べた楕円曲線のパラメータ付けの (その 1) を利用する. 定数 $c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{C}$ で条件

$$[c_1+c_2+c_3] \neq 0, \qquad [c_i-c_j] \neq 0 \quad (1 \leq i < j \leq 3) \tag{5.122}$$

を満たすものを取り, $c_0 = -c_1 - c_2 - c_3$ とおく. これらの定数を固定しておいて, 次の正則写像 $p : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を考える.

$$
\begin{aligned}
p(u) &= (x_1(u) : x_2(u) : x_3(u)) \quad (u \in \mathbb{C}), \\
x_i(u) &= [c_0 + c_i - u][c_j - u][c_k - u] \qquad (\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}).
\end{aligned}
\tag{5.123}
$$

($[u]$ の擬周期性があるので, 正則写像 $\overline{p} : E = \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ も誘導される.) このパラメータ付け (5.123) で決まる平面曲線を $C_0 = \overline{p(\mathbb{C})}$ で表す. 因みに, C_0 の定義方程式は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{[c_0 + c_3 - c_1]}{[c_3 - c_1]} x_1^2 x_2 + \frac{[c_0 + c_2 - c_1]}{[c_2 - c_1]} x_1^2 x_3 + \frac{[c_0 + c_3 - c_2]}{[c_3 - c_2]} x_1 x_2^2 \\
&+ 2\frac{[c_0]}{[0]'} \left(\frac{[c_0 + c_2 - c_3]'}{[c_2 - c_3]} + \frac{[c_0 + c_3 - c_1]'}{[c_3 - c_1]} + \frac{[c_0 + c_1 - c_2]'}{[c_1 - c_2]} \right) x_1 x_2 x_3 \\
&- \frac{[c_0 + c_2 - c_3]}{[c_2 - c_3]} x_1 x_3^2 - \frac{[c_0 + c_1 - c_2]}{[c_1 - c_2]} x_2^2 x_3 + \frac{[c_0 + c_1 - c_3]}{[c_1 - c_3]} x_2 x_3^2 = 0,
\end{aligned}
\tag{5.124}
$$

と書くことができる. ($[u]'$ は $[u]$ の微分. $x_1 x_2 x_3$ の係数はいろいろに表示できる. ここに掲げたのはその一つである.) ここで使う p, C_0 は, もとの $p_{\lambda,\mu}$, $C_{\lambda,\mu}$ とは次の変数変換で移り合うことを確認しておこう.

$$
\lambda = c_0, \quad \mu_i = c_i + \frac{\varepsilon_0}{3} \quad (i = 1, 2, 3), \quad t = u + \frac{\varepsilon_0}{3}. \tag{5.125}
$$

このパラメータ付けでは, $W_{3,n}$ 共変な有理型写像 $\varphi_{3,n} : \mathfrak{h}_{3,n} \dashrightarrow \mathbb{X}_{3,n}$ が, 固定した 1 個の楕円曲線 $C_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の上の点配置で実現されるのであった. つまり, 十分一般な $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathfrak{h}_{3,n}$. に対して

$$
\varphi_{3,n}(\varepsilon) = [p(u_1), \cdots, p(u_n)], \qquad u_j = \varepsilon_j - \frac{\varepsilon_0}{3} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{5.126}
$$

(第 3.2 節で a_j と書いた変数をここでは u_j と書いている.) 条件 $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$ の下では各 $x_i(u)/[u]^3$ が Ω 周期的になることから, C_0 上の $3d$ 個の点 $p(a_1), \ldots p(a_{3d})$ に対して, これらが C_0 と次数 d の平面曲線の交点として実現されることと, 条件 $[a_1 + \cdots + a_{3d}] = 0$ が成立することは同値である. 特に C_0 上の 3 点 $p(a_1), p(a_2), p(a_3)$ が同一直線上にあることと条件 $[a_1 + a_2 + a_3] = 0$ が成立することは同値である. なお, Weyl 群 $W_{3,n}$ の変数 $u_1, \ldots, u_n$ は次のように計算される.

$$
\begin{aligned}
s_0(u_j) &= \begin{cases} u_j - \dfrac{2}{3}(u_1 + u_2 + u_3) & (j = 1, 2, 3), \\[2mm] u_j + \dfrac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) & (j = 4, \ldots, n). \end{cases} \\
s_k(u_j) &= u_{s_k(j)} \qquad (k = 1, \ldots, n-1; j = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
\tag{5.127}
$$

議論を進める前に, 任意の既約な平面 3 次曲線は, C_0 の形の曲線 (函数 $[u]$ と定数 c_1, c_2, c_3 を適当に選んだもの) に適当な射影変換を施して得られることに注意しておこう. これを示すには, $\operatorname{rank} \Omega = 2$ の場合だけ考えればよいので, 函数 $[u]$ として, 周期格子 $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ に付随する Weierstrass のシグマ函数 $\sigma(u) = \sigma(u; \Omega)$ をとり, 3 次曲線 C_0 と Weierstrass の標準形との関係を見る. 定数 c_0, c_1, c_2, c_3 を

$$
c_0 = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad c_1 = \frac{\omega_1}{2}, \quad c_2 = \frac{\omega_2}{2}, \quad c_3 = 0, \tag{5.128}
$$

と選ぶと, C_0 のパラメータ付けは次のようになる.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sigma(u)\sigma(c_2+u)\sigma(c_2-u) = \sigma(c_2)^2\sigma(u)^3(\wp(u)-\wp(c_2)),\\
x_2 &= \sigma(u)\sigma(c_1+u)\sigma(c_1-u) = \sigma(c_1)^2\sigma(u)^3(\wp(u)-\wp(c_1)),\\
x_3 &= \sigma(c_0-u)\sigma(c_1-u)\sigma(c_2-u) = -\tfrac{1}{2}\sigma(c_0)\sigma(c_1)\sigma(c_2)\sigma(u)^3\wp'(u).
\end{aligned}
\tag{5.129}
$$

ここで, $\wp(u)=\wp(u;\Omega)$ は Ω に付随する Weierstrass $\wp$ 函数である. この表示を見ると, 射影変換

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \sigma(c_2)^2(y_2-\wp(c_2)y_1), \qquad x_2 = \sigma(c_1)^2(y_2-\wp(c_1)y_1),\\
&x_3 = -\tfrac{1}{2}\sigma(c_0)\sigma(c_1)\sigma(c_2)y_3
\end{aligned}
\tag{5.130}
$$

によって C_0 が Weierstarss 標準形

$$
y_1y_3^2 = 4(y_2-\wp(c_0)y_1)(y_2-\wp(c_1)y_1)(y_2-\wp(c_2)y_1) \tag{5.131}
$$

に移ることは明白である. 従って, 任意の非特異な平面 3 次曲線が, 射影変換で C_0 の形の曲線に書直せることになる. この Weierstarss 標準形を経由して考えると, 式 (5.127) も, [21] にあるような $\wp$ 函数を用いたパラメータ付けでの Weyl 群作用と丁度同じものになっている.

以上の準備の下に定理 5.7 の証明を行う. 一般の場合を考える前に, 第 10 点 $q=p_{10}$ が $p_1,\ldots,p_9$ と同じ 3 次曲線上にある場合を考察する.

補題 5.8 10 点配置 $[p_1,\ldots,p_9,p_{10}]\in\mathbb{X}_{3,10}$ において, 10 点がすべて非特異な平面 3 次曲線 $C\subset\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の上にあるとする. この設定で, C 上の 3 点 $\overline{p}_8,\overline{p}_9,\overline{p}_{10}$ を次のようにとる.

(1) 9 点 $p_1,\ldots,p_8,\overline{p}_9$ は, 3 次曲線のペンシルの基点となる.

(2) C 上の加法の下で $\overline{p}_8+\overline{p}_9=p_8+p_9$.

(3) C 上の加法の下で $\overline{p}_9+\overline{p}_{10}=p_8+p_{10}$.

このとき, T_{89} の $[p_1,\ldots,p_9,p_{10}]$ への作用は

$$
[p_1,\ldots,p_7,p_8,p_9,p_{10}].T_{89} = [p_1,\ldots,p_7,\overline{p}_8,\overline{p}_9,\overline{p}_{10}] \tag{5.132}
$$

で与えられる.

補題 5.8 を示すには, 適当な射影変換を施すことで, C が (5.123) のようなパラメータ付けをもつと仮定してよい. $C=C_0$ で, 10 点が座標を用いて

$$
[p_1,\ldots,p_9,p_{10}] = [p(u_1),\ldots,p(u_9),p(u_{10})] \tag{5.133}
$$

と指定されているときに, T_{89} の作用が

$$
\begin{aligned}
&[p_1,\ldots,p_9,p_{10}].T_{89} = [\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_9,\overline{p}_{10}],\\
&\overline{p}_j = p(\overline{u}_j), \quad \overline{u}_j = T_{89}(u_j) \qquad (j=1,\ldots,10)
\end{aligned}
\tag{5.134}
$$

と表されることは既に分かっている. T_{89} の u_j への作用を計算すると

$$\begin{aligned} &T_{89}(u_j)=u_j \qquad (j=1,\ldots,7),\\ &T_{89}(u_8)=u_8-\delta,\quad T_{89}(u_9)=u_9+\delta,\\ &T_{89}(u_{10})=u_{10}+u_8-u_9-\delta,\\ &u_1+\cdots+u_9=-\delta. \end{aligned} \tag{5.135}$$

即ち, 新しい点の座標 $\overline{u}_j$ $(j=1,\ldots,10)$ は次の条件で定まる.

$$\begin{aligned} &(0)\quad \overline{u}_j=u_j \qquad (j=1,\ldots,7),\\ &(1)\quad u_1+\cdots+u_8+\overline{u}_9=0,\\ &(2)\quad \overline{u}_8+\overline{u}_9=u_8+u_9,\\ &(3)\quad \overline{u}_9+\overline{u}_{10}=u_8+u_{10}. \end{aligned} \tag{5.136}$$

補題 5.8 は, $\overline{u}_j$ $(j=1,\ldots,10)$ に対するこの条件を幾何的な言葉に言換えただけのものである. なお, 点 $\overline{p}_8$ は p_9 に依存して決まるが, 点 $\overline{p}_9$ は, 8 点 $p_1,\ldots,p_8$ だけから決まり, p_9 の位置には依らないことに注意しておこう.

一般の場合の定理 5.7 の証明に移る. 定理の設定で, 補題 5.8 を曲線 C に適用すると, 定理の条件 (1), (2) で定めた $\overline{p}_8,\overline{p}_9\in C$ について

$$[p_1,\ldots,p_7,p_8,p_9].T_{89}=[p_1,\ldots,p_7,\overline{p}_8,\overline{p}_9] \tag{5.137}$$

が成立する. (この部分は第 10 点目には依らない.) 特に T_{89} の $[p_1,\ldots,p_8,p_9,q]$ への作用は, 何らかの点 $\overline{q}\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を用いて

$$[p_1,\ldots,p_7,p_8,p_9,q].T_{89}=[p_1,\ldots,p_7,\overline{p}_8,\overline{p}_9,\overline{q}] \tag{5.138}$$

と表される. ここで, $T_{89}\in W_{3,9}$ が次のような表示を持つことに注意する:

$$T_{89}=w\,s_{89},\qquad w=s_{128}s_{348}s_{567}s_{348}s_{128}\in W_{3,8}. \tag{5.139}$$

(ここで $W_{3,8}=\langle s_0,s_1,\ldots,s_7\rangle$.) この表示に注目して, 式 (5.138) に右から $s_{89}\,s_{9,10}\in W_{3,10}$ を作用させると

$$[p_1,\ldots,p_7,p_8,q,p_9].w=[p_1,\ldots,p_7,\overline{p}_9,\overline{q},\overline{p}_8] \qquad (\mathbb{X}_{3,10}\text{ における等式}) \tag{5.140}$$

となる. ($s_{9,10}$ は $w\in W_{3,8}$ と可換であることを用いた.) $w\in W_{3,8}$ なので, この関係式は $\mathbb{X}_{3,10}$ から $\mathbb{X}_{3,9}$ に射影することができて,

$$[p_1,\ldots,p_7,p_8,q].w=[p_1,\ldots,p_7,\overline{p}_9,\overline{q}] \qquad (\mathbb{X}_{3,9}\text{ における等式}) \tag{5.141}$$

を得る. この式から $\overline{q}$ は p_9 には依存しないことが分かる. (このことは, 前に計算した T_{78} の場合の明示公式 (5.89) を見ても明瞭である. 実際, この場合の多項式 P_i,Q_i,R_i,S_i は, 何れもパラメータ ε_8 を含んでいない. これは, T_{78} に対する (5.75), (5.76) 式に e_8 がないことからも分かる.) 従って (5.138) で p_9 を $\overline{p}_9$ で置き換えたもの $[p_1,\ldots,p_8,\overline{p}_9,q]$ について等式

$$[p_1,\ldots,p_7,p_8,\overline{p}_9,q].T_{89}=[p_1,\ldots,p_7,p_8,\overline{p}_9,\overline{q}] \tag{5.142}$$

が成立する. (この場合は, $p_1, \ldots, p_8, \overline{p}_9$ が既にペンシルの基点になっているので第 8 番目と第 9 番目は不変なままである.) そこで, 今度は補題 5.8 を曲線 D に適用すると点 $\overline{q}$ は 定理の条件 (3) で決めたものでなければいけないことが分かる. 以上で, 定理 5.7 の証明を終わる.

この論説では超幾何型特殊解の考察は行っていないが, 論文 [8], [9] では定理 5.7 のような T_{ij} の幾何学的記述を応用して, 楕円差分 Painlevé 方程式や q 差分 Painlevé 方程式の系列の超幾何型の特殊解の構成を行った. また, [23] においては, T_{ij} の幾何学的記述を基礎にして, 楕円差分 Painlevé 方程式と, Quispel-Roberts-Thompson [18] の可積分写像 (QRT 系) との関係が論じられている.

参考文献

[1] 青本和彦・喜多通武著「超幾何函数論」シュプリンガー現代数学シリーズ, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.

[2] A.B. Coble: *Algebraic Geometry and Theta Functions.* American Mathematical Society, 1929. Reprint of the 1929 edition: American Mathematical Society Colloquium Publications, 10. American Mathematical Society, 1982.

[3] I. Dolgachev and D. Ortland: *Point Sets in Projective Spaces and Theta Functions.* Astérisque No. 165 (1988), 210 pp, 1989.

[4] I.B. Frenkel and V.G. Turaev: Elliptic solution of the Yang-Baxter equation and modular hypergeometric functions, in *The Arnold-Gelfand Mathematical Seminars*, pp.171–204, Birkhäuser, 1997.

[5] B. Grammaticos and A. Ramani: Discrete Painlevé equations: A review, in *Discrete Integrable Systems* (B. Grammaticos, Y. Kosmann-Schwarzbach and T. Tamizhmani, Eds.), Lecture Notes in Physics vol.644, pp.245–321, Springer, 2004.

[6] B. Grammaticos, A. Ramani and V. Papageorgiou: Do integrable mappings have the Painlevé property?, Phys. Rev. Lett. **67**(1991), 1825–1828; A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta: Discrete versions of the Painlevé equations, ibid., 1829–1832.

[7] V.G. Kac: *Infinite dimensional Lie algebras*, Third edition, Cambridge University Press, 1990.

[8] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada: ${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation, J. Phys. A:Math. Gen. **36**(2003), L263–L272.

[9] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada: Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations, Internat. Math. Res. Notices 2004, no.47, 2497–2521.

[10] Ju.I. Manin: The Tate height of points on an Abelian variety, its variants and applications. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28**(1964), 1363–1390; AMS Transl. **59**(1966), 82-110.

[11] S. Mizoguchi and Y. Yamada: $W(E_{10})$ symmetry, M-theory and Painlevé equations, Phys. Lett. B **537**(2002), 130–140.

[12] M. Murata: New expressions for discrete Painlevé equations, Funkcial. Ekvac. **47**(2004), 291–305.

[13] M. Nagata: On rational surfaces. I, Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **32**(1960), 351–370; On rational surfaces. II, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **33**(1960/1961), 271–293.

[14] 野海正俊著「パンルヴェ方程式 – 対称性からの入門」すうがくの風景 4, 朝倉書店, 2000. 英訳: M. Noumi: *Painlevé Equations through Symmetry*, Translations of Mathematical Monographs Vol.223, American Mathematical Society, 2004.

[15] M. Noumi and Y. Yamada: Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **199**(1998), 281-295.

[16] Y. Ohta, A. Ramani and B. Grammaticos: An affine Weyl group approach to the eight-parameter discrete Painlevé equation, *Symmetries and integrability of difference equations*(Tokyo, 2000), J. Phys. A: Math. Gen. **34**(2001), 10523–10532.

[17] Y. Ohta, A. Ramani and B. Grammaticos: Elliptic discrete Painlevé equations. J. Phys. A **35**(2002), L653–L659.

[18] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson: Integrable mappings and soliton equations. II, Physica D, **34**(1989), 183–192.

[19] A. Ramani, B. Grammaticos and V. Papageorgiou: Singularity confinement, *Symmetries and integrability of difference equations* (Estérel, PQ, 1994), 303–318, CRM Proc. Lecture Notes, 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[20] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Satsuma: Bilinear discrete Painlevé equations, J. Phys. A **28**(1995), 4655–4665.

[21] H. Sakai: Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **220**(2001), 165–229.

[22] V.P. Spiridonov and A.S. Zhedanov: Generalized eigenvalue problem and a new family of rational functions biorthogonal on elliptic grids, in *Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions* (J. Bustoz et al. Eds.), pp.365–388, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[23] T. Tsuda: Integrable mappings via rational elliptic surfaces, J. Phys. A:Math. Gen. **37**(2004), 2721–2730.

[24] E.T. Whittaker and G.N. Watson: *A Course of Modern Analysis*, Fourth Edition, Cambridge University Press, 1927.

[25] M. Yoshida: *Hypergeometric Functions, My Love.* Aspects of Mathematics 32, Vieweg, 1997. 邦訳: 吉田正章著「私説 超幾何函数 — 対称領域による点配置空間の一意化」共立講座 21 世紀の数学 24, 共立出版, 1999.