平面曲線の離散微分幾何

松浦 望

福岡大学

離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル
2010 年 2 月 24 日

- 井ノ口さんの図

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{微分幾何}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\text{微分方程式}} \arrow[d, leftrightarrow] \\ \boxed{\text{離散微分幾何}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\text{差分方程式}} \end{tikzcd}$$

- 例

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{平面曲線の変形}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\text{KdV 方程式}} \arrow[d, leftrightarrow] \\ \boxed{\text{?}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\text{差分 KdV 方程式}} \end{tikzcd}$$

- 例

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{平面曲線の変形}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\text{modified KdV 方程式}} \arrow[d, leftrightarrow] \\ \boxed{\text{?}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\text{差分 modified KdV 方程式}} \end{tikzcd}$$

- 差分 KdV 方程式と差分 modified KdV 方程式
- 差分 KdV 方程式（筧さんのレクチャー）

$$\frac{1}{v(m+1,n+1)} - \frac{1}{v(m,n)} = c\Big(v(m+1,n) - v(m,n+1)\Big)$$

もっと短く表記 $\displaystyle \frac{1}{v_{n+1}^{m+1}} - \frac{1}{v_n^m} = c\left(v_n^{m+1} - v_{n+1}^m\right)$

- 差分 modified KdV 方程式

$$w_{n+1}^{m+1} - w_n^m = \arctan\left(c\tan w_n^{m+1}\right) - \arctan\left(c\tan w_{n+1}^m\right)$$

- 話すこと
  1. 平面折線の運動と差分 modified KdV 方程式
  2. 平面折線の運動と差分 KdV 方程式
  3. 差分 modified KdV 方程式と差分 KdV 方程式の間の関係（ミウラ変換）

$\gamma = \gamma(t,x)$: 各時刻 t ごとに平面 $\mathbb{E}^2$ 内の曲線が与えられている

- 曲線の径数
  $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$
- 曲率
  $\gamma'' = \kappa R\left(\frac{\pi}{2}\right)\gamma'$
- 変形の方向を曲線の接線方向と法線方向に分解
  $\dot{\gamma} = a\gamma' + bR\left(\frac{\pi}{2}\right)\gamma'$

  1. $a' = \kappa b$
  2. $\dot{\kappa} = (b' + \kappa a)' = \left(D^2 + \kappa^2 + \kappa' D^{-1}\kappa\right) b$

  証明：$\phi = \left(\gamma', R(\pi/2)\gamma'\right) \in \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ とおくと $\phi' = \phi X, \dot{\phi} = \phi T$ となる。ただし

  $$X = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a' - \kappa b & -\kappa a - b' \\ \kappa a + b' & a' - \kappa b \end{pmatrix}$$

- 特別な方向
  $b = \kappa', a = \kappa^2/2$ とすれば、曲率 κ は modified KdV 方程式をみたす

Goldstein and Petrich (1991)

$\gamma:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{E}^2,\ n\longmapsto\gamma_n$ s.t. $\gamma_{n+1},\gamma_n,\gamma_{n-1}$ は同一直線上にない

- $\varepsilon_n := |\gamma_{n+1}-\gamma_n|$

1. $$\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\varepsilon_n} = R(\theta_n)\frac{\gamma_n-\gamma_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}}$$
2. ふたつの定数 δ, w_0 を与えて
$$w_{n+1} = \arctan\left(\frac{\delta+\varepsilon_n}{\delta-\varepsilon_n}\tan w_n\right) - \frac{\theta_{n+1}}{2}$$
3. $$\overline{\gamma}_n := \gamma_n + \delta\cos 2w_n\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\varepsilon_n} + \delta\sin 2w_n R\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\varepsilon_n}$$

これを繰り返す：$\gamma \xmapsto{\delta,\ w_0} \overline{\gamma} = \gamma^1 \xmapsto{\delta_1,\ w_0^1} \gamma^2 \xmapsto{\delta_2,\ w_0^2} \cdots$

- $$\gamma_n^{m+1} = \gamma_n^m + \delta_m\cos 2w_n^m\frac{\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m}{\varepsilon_n} + \delta_m\sin 2w_n^m R\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m}{\varepsilon_n}$$
- w は次の差分方程式をみたす

$$w_{n+1}^{m+1} - w_n^m = \arctan\left(\frac{\delta_{m+1}+\varepsilon_n}{\delta_{m+1}-\varepsilon_n}\tan w_n^{m+1}\right) - \arctan\left(\frac{\delta_m+\varepsilon_{n+1}}{\delta_m-\varepsilon_{n+1}}\tan w_{n+1}^m\right)$$

$\gamma = \gamma(t,x)$: 各時刻 t ごとに平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線が与えられている

- 曲線の径数
  $\det(\gamma', \gamma) = 1$
- 曲率
  $\gamma'' = -\kappa\gamma$
- 変形の方向を曲線の接線方向と法線方向に分解
  $\dot{\gamma} = a\gamma' + b\gamma$
  1. $a' = -2b$
  2. $\dot{\kappa} = -b'' + 2\kappa a' + \kappa' a = \left(D^2 + 4\kappa + 2\kappa' D^{-1}\right)(-b)$
- 特別な方向
  $b = -\kappa', a = 2\kappa$ とすれば、曲率 κ は KdV 方程式をみたす

Pinkall (1995)

$$\gamma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ n \longmapsto \gamma_n \quad \text{s.t.} \quad \varepsilon_n := \det(\gamma_{n+1}, \gamma_n) \neq 0$$

- $\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} \neq 0$ を要請
  すなわち $\gamma_{n+1} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}\gamma_n \bigcup (\gamma_{n-1} + \mathbb{R}\gamma_n)$

1. ふたつの定数 δ, v_0 を与えて
$$v_{n+1} = \frac{p_n}{q_n + v_n}, \quad p_n = \frac{\varepsilon_n(\varepsilon_{n+1} - \delta)}{\varepsilon_{n+1}(\varepsilon_n + \delta)}, \quad q_n = -\frac{\delta \det(\gamma_{n+2}, \gamma_n)}{\varepsilon_{n+1}(\varepsilon_n + \delta)}$$
2. $\overline{\gamma}_n := \dfrac{\delta}{\varepsilon_n}\gamma_{n+1} + \left(1 - \dfrac{\delta}{\varepsilon_n}\right)\dfrac{1}{v_n}\gamma_n$

- v は次の差分方程式をみたす。

$$\left(\frac{1}{\delta_{m+1}} - \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}\right)\frac{1}{v_{n+1}^{m+1}} - \left(\frac{1}{\delta_m} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right)\frac{1}{v_n^m}$$
$$= \left(\frac{1}{\delta_{m+1}} + \frac{1}{\varepsilon_n}\right)v_n^{m+1} - \left(\frac{1}{\delta_m} + \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}\right)v_{n+1}^m$$

ミウラ変換 (Miura, 1968)

- modified KdV 方程式をみたす κ に対して $\widetilde{\kappa} := \dfrac{\kappa^2}{4} + \dfrac{\sqrt{-1}}{2}\kappa'$ と定めると $\widetilde{\kappa}$ は KdV 方程式をみたす

ミウラ変換を曲線の運動のレベルで考える (Hoffmann, 2000)

1. $\gamma\,(t, x)$: $\mathbb{E}^2$ 内の曲線が modified KdV 方程式にしたがって動く
2. $\mathbb{E}^2$ を $\mathbb{C}$ と思う
3. $\widetilde{\gamma} := \dfrac{1}{\sqrt{\gamma'}}\begin{pmatrix}\gamma \\ 1\end{pmatrix}$: $\mathbb{C}^2$ 内の曲線たち
4. $\widetilde{\gamma}$ は KdV 方程式にしたがって動く。ので $\gamma \mapsto \widetilde{\gamma}$ はミウラ変換を誘導する

ミウラ変換

- 差分ポテンシャル modified KdV 方程式をみたす p に対して

$$v_n^m = \frac{(\delta_m - \varepsilon_n)\lambda_n^m}{\delta_m \lambda_{n+1}^m - \varepsilon_n \lambda_n^{m+1}}, \quad \lambda_n^m = \exp\left(-2\sqrt{-1}p_n^m\right)$$

と定めると v は差分 KdV 方程式をみたす

差分ポテンシャル modified KdV 方程式

- $\tan\left(p_{n+1}^{m+1} - p_n^m\right) = \dfrac{\delta_m + \varepsilon_n}{\delta_m - \varepsilon_n}\tan\left(p_n^{m+1} - p_{n+1}^m\right)$
- $w_{n+1}^{m+1} - w_n^m = \arctan\left(\dfrac{\delta_{m+1} + \varepsilon_n}{\delta_{m+1} - \varepsilon_n}\tan w_n^{m+1}\right) - \arctan\left(\dfrac{\delta_m + \varepsilon_{n+1}}{\delta_m - \varepsilon_{n+1}}\tan w_{n+1}^m\right)$
- p と w の関係 $\begin{cases} p_n^{m+1} - p_{n+1}^m = w_n^m \\ p_{n+2}^m - p_n^m = \arctan\left(\dfrac{\delta_m + \varepsilon_n}{\delta_m - \varepsilon_n}\tan w_n^m\right) - w_{n+1}^m \end{cases}$

ミウラ変換

- 差分ポテンシャル modified KdV 方程式をみたす p に対して

$$v_n^m = \frac{(\delta_m - \varepsilon_n)\lambda_n^m}{\delta_m \lambda_{n+1}^m - \varepsilon_n \lambda_n^{m+1}}, \quad \lambda_n^m = \exp\left(-2\sqrt{-1}p_n^m\right)$$

と定めると v は差分 KdV 方程式をみたす

折線の運動のレベルで考える

1. γ_n^m: $\mathbb{E}^2$ 内の折線が差分 modified KdV 方程式にしたがって動く
2. $\mathbb{E}^2$ を $\mathbb{C}$ と思う
3. $\widetilde{\gamma}_n^m := \lambda_n^m \begin{pmatrix} \gamma_n^m \\ 1 \end{pmatrix}$: $\mathbb{C}^2$ 内の折線たち
4. $\widetilde{\gamma}$ は差分 KdV 方程式にしたがって動く。ので $\gamma \mapsto \widetilde{\gamma}$ はミウラ変換を誘導する

ミウラ変換

- 差分ポテンシャル modified KdV 方程式をみたす p に対して

$$v_n^m = \frac{(\delta_m - \varepsilon_n)\lambda_n^m}{\delta_m \lambda_{n+1}^m - \varepsilon_n \lambda_n^{m+1}}, \quad \lambda_n^m = \exp\left(-2\sqrt{-1}p_n^m\right)$$

と定めると v は差分 KdV 方程式をみたす

詳しく

- $\tilde{\gamma}_n^m = \lambda_n^m \begin{pmatrix} \gamma_n^m \\ 1 \end{pmatrix}$ が差分 KdV にしたがうように λ を決めたい

  つまり $\tilde{\gamma}_n^{m+1} = \frac{\delta_m}{\varepsilon_n}\tilde{\gamma}_{n+1}^m + \left(1 - \frac{\delta_m}{\varepsilon_n}\right)\frac{1}{v_n^m}\tilde{\gamma}_n^m$ となってほしい
- $\tilde{\gamma}_n^{m+1} = \frac{\delta_m}{\varepsilon_n}\frac{\lambda_n^{m+1}}{\lambda_{n+1}^m}\exp(2\sqrt{-1}w_n^m)\tilde{\gamma}_{n+1}^m + \frac{\lambda_n^{m+1}}{\lambda_n^m}\left(1 - \frac{\delta_m}{\varepsilon_n}\exp\left(2\sqrt{-1}w_n^m\right)\right)\tilde{\gamma}_n^m$
- p と w の関係 $w_n^m = p_n^{m+1} - p_{n+1}^m$ を思い出す

まとめ

平面折線の運動を考えることによって

- 差分 mKdV 方程式と差分 KdV 方程式を導出した

$$\boxed{\dot{\gamma} = 2\kappa\gamma' - \kappa'\gamma} \longleftrightarrow \boxed{\dot{\kappa} = \kappa''' + 6\kappa\kappa'}$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_n^{m+1} &= \frac{\delta_m}{\varepsilon_n}\gamma_{n+1}^m \\ &\quad + \left(1 - \frac{\delta_m}{\varepsilon_n}\right)\frac{1}{v_n^m}\gamma_n^m\end{aligned}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\delta_{m+1}} - \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}\right)\frac{1}{v_{n+1}^{m+1}} - \left(\frac{1}{\delta_m} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right)\frac{1}{v_n^m} \\ &= \left(\frac{1}{\delta_{m+1}} + \frac{1}{\varepsilon_n}\right)v_n^{m+1} - \left(\frac{1}{\delta_m} + \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}\right)v_{n+1}^m\end{aligned}}$$

- ミウラ変換を与えた

課題

- 素直な連続極限
- ほかの幾何でほかの差分方程式