



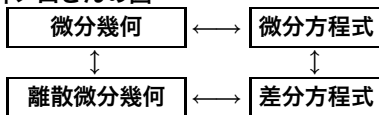
平面曲線の離散微分幾何

松浦 望

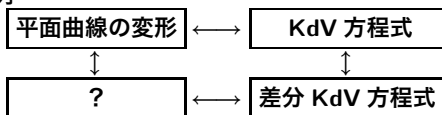
福岡大学

離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル
2010年2月24日

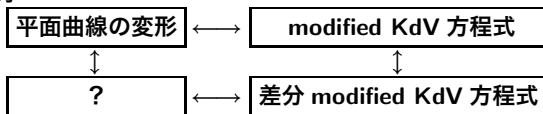
■ 井ノ口さんの図



■ 例



■ 例



- 差分 KdV 方程式と差分 modified KdV 方程式
- 差分 KdV 方程式 (筧さんのレクチャー)

$$\frac{1}{v(m+1, n+1)} - \frac{1}{v(m, n)} = c(v(m+1, n) - v(m, n+1))$$

もっと短く表記 $\frac{1}{v_{n+1}^{m+1}} - \frac{1}{v_n^m} = c(v_n^{m+1} - v_{n+1}^m)$

- 差分 modified KdV 方程式

$$w_{n+1}^{m+1} - w_n^m = \arctan(c \tan w_n^{m+1}) - \arctan(c \tan w_{n+1}^m)$$

- 話すこと

- 1 平面折線の運動と差分 modified KdV 方程式
- 2 平面折線の運動と差分 KdV 方程式
- 3 差分 modified KdV 方程式と差分 KdV 方程式の関係 (ミウラ変換)

$\gamma = \gamma(t, x)$: 各時刻 t ごとに平面 \mathbb{E}^2 内の曲線が与えられている

- 曲線の径数

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$$

- 曲率

$$\gamma'' = \kappa R\left(\frac{\pi}{2}\right) \gamma'$$

- 変形の方法を曲線の接線方向と法線方向に分解

$$\dot{\gamma} = a\gamma' + bR\left(\frac{\pi}{2}\right) \gamma'$$

- 1 $a' = \kappa b$

- 2 $\dot{\kappa} = (b' + \kappa a)' = (D^2 + \kappa^2 + \kappa' D^{-1} \kappa) b$

証明: $\phi = (\gamma', R(\pi/2)\gamma') \in \text{SO}(2, \mathbb{R})$ とおくと $\phi' = \phi X$, $\dot{\phi} = \phi T$ となる。ただし

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a' - \kappa b & -\kappa a - b' \\ \kappa a + b' & a' - \kappa b \end{pmatrix}$$

- 特別な方向

$b = \kappa'$, $a = \kappa^2/2$ とすれば、曲率 κ は modified KdV 方程式をみたす

Goldstein and Petrich (1991)

$\gamma: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{E}^2, n \longmapsto \gamma_n$ s.t. $\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}$ は同一直線上にない

$$\blacksquare \varepsilon_n := |\gamma_{n+1} - \gamma_n|$$

$$\blacksquare \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\varepsilon_n} = R(\theta_n) \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}}$$

\blacksquare ふたつの定数 δ, w_0 を与えて

$$w_{n+1} = \arctan \left(\frac{\delta + \varepsilon_n}{\delta - \varepsilon_n} \tan w_n \right) - \frac{\theta_{n+1}}{2}$$

$$\blacksquare \bar{\gamma}_n := \gamma_n + \delta \cos 2w_n \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\varepsilon_n} + \delta \sin 2w_n R \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\varepsilon_n}$$

これを繰り返す: $\gamma \xrightarrow{\delta, w_0} \bar{\gamma} = \gamma^1 \xrightarrow{\delta_1, w_0^1} \gamma^2 \xrightarrow{\delta_2, w_0^2} \dots$

$$\blacksquare \gamma_n^{m+1} = \gamma_n^m + \delta_m \cos 2w_n^m \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{\varepsilon_n} + \delta_m \sin 2w_n^m R \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{\varepsilon_n}$$

$\blacksquare w$ は次の差分方程式をみたす

$$\begin{aligned} w_{n+1}^{m+1} - w_n^m \\ = \arctan \left(\frac{\delta_{m+1} + \varepsilon_n}{\delta_{m+1} - \varepsilon_n} \tan w_n^{m+1} \right) - \arctan \left(\frac{\delta_m + \varepsilon_{n+1}}{\delta_m - \varepsilon_{n+1}} \tan w_{n+1}^m \right) \end{aligned}$$

$\gamma = \gamma(t, x)$: 各時刻 t ごとに平面 \mathbb{R}^2 内の曲線が与えられている

■ 曲線の径数

$$\det(\gamma', \gamma) = 1$$

■ 曲率

$$\gamma'' = -\kappa\gamma$$

■ 変形の方角を曲線の接線方向と法線方向に分解

$$\dot{\gamma} = a\gamma' + b\gamma$$

$$\text{1 } a' = -2b$$

$$\text{2 } \dot{\kappa} = -b'' + 2\kappa a' + \kappa' a = (D^2 + 4\kappa + 2\kappa' D^{-1})(-b)$$

■ 特別な方向

$b = -\kappa'$, $a = 2\kappa$ とすれば、曲率 κ は KdV 方程式をみたく

Pinkall (1995)

$$\gamma: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad n \longmapsto \gamma_n \quad \text{s.t.} \quad \varepsilon_n := \det(\gamma_{n+1}, \gamma_n) \neq 0$$

- $\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} \neq 0$ を要請

$$\text{すなわち } \gamma_{n+1} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}\gamma_n \cup (\gamma_{n-1} + \mathbb{R}\gamma_n)$$

- 1 ふたつの定数 δ, v_0 を与えて

$$v_{n+1} = \frac{p_n}{q_n + v_n}, \quad p_n = \frac{\varepsilon_n (\varepsilon_{n+1} - \delta)}{\varepsilon_{n+1} (\varepsilon_n + \delta)}, \quad q_n = -\frac{\delta \det(\gamma_{n+2}, \gamma_n)}{\varepsilon_{n+1} (\varepsilon_n + \delta)}$$

- 2 $\bar{\gamma}_n := \frac{\delta}{\varepsilon_n} \gamma_{n+1} + \left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon_n}\right) \frac{1}{v_n} \gamma_n$

- v は次の差分方程式をみます。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\delta_{m+1}} - \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} \right) \frac{1}{v_{n+1}^{m+1}} - \left(\frac{1}{\delta_m} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) \frac{1}{v_n^m} \\ &= \left(\frac{1}{\delta_{m+1}} + \frac{1}{\varepsilon_n} \right) v_n^{m+1} - \left(\frac{1}{\delta_m} + \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} \right) v_{n+1}^m \end{aligned}$$

ミウラ変換 (Miura, 1968)

- modified KdV 方程式をみたす κ に対して $\tilde{\kappa} := \frac{\kappa^2}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\kappa'$ と定めると $\tilde{\kappa}$ は KdV 方程式をみたす

ミウラ変換を曲線の運動のレベルで考える (Hoffmann, 2000)

- 1 $\gamma(t, x) : \mathbb{E}^2$ 内の曲線が modified KdV 方程式にしたがって動く
- 2 \mathbb{E}^2 を \mathbb{C} と思う
- 3 $\tilde{\gamma} := \frac{1}{\sqrt{\gamma'}} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2$ 内の曲線たち
- 4 $\tilde{\gamma}$ は KdV 方程式にしたがって動く。なので $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ はミウラ変換を誘導する

ミウラ変換

- 差分ポテンシャル modified KdV 方程式をみたす p に対して

$$v_n^m = \frac{(\delta_m - \varepsilon_n) \lambda_n^m}{\delta_m \lambda_{n+1}^m - \varepsilon_n \lambda_n^{m+1}}, \quad \lambda_n^m = \exp\left(-2\sqrt{-1}p_n^m\right)$$

と定めると v は差分 KdV 方程式をみたす

差分ポテンシャル modified KdV 方程式

- $\tan(p_{n+1}^{m+1} - p_n^m) = \frac{\delta_m + \varepsilon_n}{\delta_m - \varepsilon_n} \tan(p_n^{m+1} - p_{n+1}^m)$
- $w_{n+1}^{m+1} - w_n^m = \arctan\left(\frac{\delta_{m+1} + \varepsilon_n}{\delta_{m+1} - \varepsilon_n} \tan w_n^{m+1}\right) - \arctan\left(\frac{\delta_m + \varepsilon_{n+1}}{\delta_m - \varepsilon_{n+1}} \tan w_{n+1}^m\right)$
- p と w の関係 $\begin{cases} p_n^{m+1} - p_{n+1}^m = w_n^m \\ p_{n+2}^m - p_n^m = \arctan\left(\frac{\delta_m + \varepsilon_n}{\delta_m - \varepsilon_n} \tan w_n^m\right) - w_{n+1}^m \end{cases}$

ミウラ変換

- 差分ポテンシャル modified KdV 方程式をみたす p に対して

$$v_n^m = \frac{(\delta_m - \varepsilon_n) \lambda_n^m}{\delta_m \lambda_{n+1}^m - \varepsilon_n \lambda_n^{m+1}}, \quad \lambda_n^m = \exp\left(-2\sqrt{-1}p_n^m\right)$$

と定めると v は差分 KdV 方程式をみたす

折線の運動のレベルで考える

- 1 γ_n^m : \mathbb{E}^2 内の折線が差分 modified KdV 方程式にしたがって動く
- 2 \mathbb{E}^2 を \mathbb{C} と思う
- 3 $\tilde{\gamma}_n^m := \lambda_n^m \begin{pmatrix} \gamma_n^m \\ 1 \end{pmatrix}$: \mathbb{C}^2 内の折線たち
- 4 $\tilde{\gamma}$ は差分 KdV 方程式にしたがって動く。なので $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ はミウラ変換を誘導する

ミウラ変換

- 差分ポテンシャル modified KdV 方程式をみたす p に対して

$$v_n^m = \frac{(\delta_m - \varepsilon_n) \lambda_n^m}{\delta_m \lambda_{n+1}^m - \varepsilon_n \lambda_n^{m+1}}, \quad \lambda_n^m = \exp\left(-2\sqrt{-1}p_n^m\right)$$

と定めると v は差分 KdV 方程式をみたす

詳しく

- $\tilde{\gamma}_n^m = \lambda_n^m \begin{pmatrix} \gamma_n^m \\ 1 \end{pmatrix}$ が差分 KdV にしたがうように λ を決めたい

つまり $\tilde{\gamma}_{n+1}^{m+1} = \frac{\delta_m}{\varepsilon_n} \tilde{\gamma}_{n+1}^m + \left(1 - \frac{\delta_m}{\varepsilon_n}\right) \frac{1}{v_n^m} \tilde{\gamma}_n^m$ となつてほしい

- $\tilde{\gamma}_{n+1}^{m+1} = \frac{\delta_m}{\varepsilon_n} \frac{\lambda_n^{m+1}}{\lambda_{n+1}^m} \exp(2\sqrt{-1}w_n^m) \tilde{\gamma}_{n+1}^m + \frac{\lambda_n^{m+1}}{\lambda_n^m} \left(1 - \frac{\delta_m}{\varepsilon_n} \exp(2\sqrt{-1}w_n^m)\right) \tilde{\gamma}_n^m$
- p と w の関係 $w_n^m = p_n^{m+1} - p_{n+1}^m$ を思い出す

まとめ

平面折線の運動を考えることによって

- 差分 mKdV 方程式と差分 KdV 方程式を導出した

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\dot{\gamma} = 2\kappa\gamma' - \kappa'\gamma} & \longleftrightarrow & \boxed{\dot{\kappa} = \kappa''' + 6\kappa\kappa'} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \boxed{\gamma_n^{m+1} = \frac{\delta_m}{\varepsilon_n} \gamma_{n+1}^m + \left(1 - \frac{\delta_m}{\varepsilon_n}\right) \frac{1}{v_n^m} \gamma_n^m} & \longleftrightarrow & \boxed{\left(\frac{1}{\delta_{m+1}} - \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}\right) \frac{1}{v_{n+1}^{m+1}} - \left(\frac{1}{\delta_m} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) \frac{1}{v_n^m} = \left(\frac{1}{\delta_{m+1}} + \frac{1}{\varepsilon_n}\right) v_n^{m+1} - \left(\frac{1}{\delta_m} + \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}\right) v_{n+1}^m}
 \end{array}$$

- ミウラ変換を与えた

課題

- 素直な連続極限
- ほかの幾何でほかの差分方程式